

TÉCNICO EN PROTECCIONES ELÉCTRICAS MÓDULO I

ELECTRICIDAD Y ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Celaya, Gto. Enero de 2008

CONTENIDO

1.0 FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

1.1	Sistemas de unidades	4
1.2	Leyes fundamentales	8
1.2.1	Ley de Coulomb	8
1.2.1.1	Carga eléctrica	8
1.2.1.2	Ley de Coulomb	10
1.2.2	Leyes de Faraday	12
1.2.2.1	Los experimentos de Faraday	12
1.2.2.2	Ley de inducción de Faraday	13
1.2.3	Ley de Lenz	14
1.2.4	Ley de Gauss	15
1.2.4.1	Flujo de campo eléctrico	15
1.2.4.2	Aplicaciones de la Ley de Gauss	16
1.2.5	Ley de Ampere	17
1.2.5.1	Ley de Biot y Savart	17
1.2.5.2	Aplicaciones de la Ley de Biot y Savart	18
1.2.5.3	Las líneas de B	19
1.2.5.4	Ley de Ampere	20
1.2.5.5	Solenoides y tiroides	22
1.3	Ecuaciones básicas del electromagnetismo (La síntesis de Maxwell)	23

2.0 ELEMENTOS DE CIRCUITOS

2.1	Elemento simple	26
2.2	Elementos activos	26
2.3	Elementos pasivos	27
2.4	Circuito	27
2.4.1	Circuito con elementos en serie	27
2.4.2	Circuito con elementos en paralelo	28
2.4.3	Circuitos serie-paralelo	28
2.4.4	Circuitos con elementos que no están conectados en serie ni en paralelo	28

3.0 INTENSIDAD DE CORRIENTE Y RESISTENCIA

3.1	Intensidad de corriente eléctrica	29
3.2	Resistencia, resistividad y conductividad	31
3.3	Ley de Ohm	33
3.4	Resistencias en serie y paralelo	33

4.0 CAPACITANCIA

4.1	Capacitancia	36
4.2	Cálculo de la capacitancia	36
4.3	Capacitores en serie y paralelo	37

5.0 INDUCTANCIA

5.1 Inductancia	38
5.2 Cálculo de la inductancia	39
5.3 Inductores en serie y paralelo	39

6.0 ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE DIRECTA

6.1 Fuerza electromotriz	40
6.2 Diferencia de potencial	40
6.3 Cálculo de corriente en un circuito cerrado simple	41
6.4 Leyes de Kirchoff	41
6.5 Divisores de potencial y corriente	41
6.6 Conversiones delta-estrella y estrella-delta	45
6.7 Análisis de mallas	45
6.8 Análisis nodal	47
6.9 Cálculo de potencia en corriente directa	48

7.0 NÚMEROS COMPLEJOS Y DIAGRAMAS FASORIALES

7.1 Números complejos	49
7.2 Álgebra de números complejos	52
7.3 Notación fasorial	54

8.0 ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA

8.1 Corriente alterna	56
8.2 Magnitudes de la corriente alterna	57
8.3 Relación de corriente y potencial de los elementos puros	58
8.3.1 Resistencia pura	59
8.3.2 Capacitancia pura	60
8.3.3 Intensidad pura	61
8.3.4 Angulo de fase	62
8.3.5 Admitancia	62
8.4 Leyes de Kirchhoff para corriente alterna	62
8.5 Divisores de voltaje y corriente	62
8.6 Análisis de mallas y nodos para circuitos de c.a.	63
8.7 Potencia en circuitos de corriente alterna	67
8.7.1 Triángulo de potencias	70
8.7.2 Factor de potencia	71

9.0 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

9.1 Principio de operación del transformador	73
9.2 Principio de operación del alternador	78

CAPÍTULO

1

FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Los fenómenos magnéticos habían permanecido durante mucho tiempo en la historia de la ciencia como independientes de los eléctricos. Pero el avance de la electricidad por un lado y del magnetismo por otro, preparó la síntesis de ambas partes de la física en una sola, el electromagnetismo, que reúne las relaciones mutuas existentes entre los campos magnéticos y las corrientes eléctricas. James Clark Maxwell fué el científico que cerró ese sistema de relaciones al elaborar su teoría electromagnética, una de las más bellas construcciones conceptuales de la física clásica.

1.0 FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

1.1 Sistemas de unidades

En primer lugar se establecerá un lenguaje común, los ingenieros no podrían comunicarse entre ellos en forma provechosa si los términos que usan no fueran claros y con significado definido. También es cierto que poco es lo que se puede aprender de un libro que no define cuidadosamente cada nueva cantidad que usa. Si se habla con el vago lenguaje de los comerciales de televisión, como en la frase “deja su ropa 40% más blanca”, y no existe la preocupación por definir la blancura o por dar unidades en las cuales se pueda medir, entonces ciertamente no habrá éxito en ingeniería, aunque, eso sí, se venderán muchos detergentes.

Para indicar el valor de alguna cantidad medible debe proporcionarse tanto un número como una unidad, como por ejemplo “3 pulgadas”. Afortunadamente todos usan el mismo sistema de numeración y lo conocen bien. Como esto no es válido para las unidades, se deberá emplear cierto tiempo en familiarizarse con un sistema de unidades adecuado. Debe llegarse a un acuerdo sobre una unidad estándar, cerciorarse de su permanencia y de su aceptación general. La unidad estándar de longitud, por ejemplo, no debe definirse como la distancia entre dos marcas sobre una cierta banda elástica; ésta no es permanente y además cualquier otra persona podría usar su propio estándar.

También se necesita definir cada término técnico al ser usado por primera vez, estableciendo la definición en términos de unidades y cantidades definidas con anterioridad. Estas definiciones no siempre podrán ser tan generales como lo exigirían los más teóricos. Por ejemplo, pronto será necesario definir voltaje. Por tanto debe aceptarse una definición muy completa y general, que por el momento no se puede apreciar ni entender, o bien adoptar una definición más simple y menos general, pero que será suficientemente buena para los propósitos presentes. Cuando sea necesaria una definición más general, el familiarizarse con los conceptos más simples resultará una gran ayuda.

También se hará evidente que muchas cantidades están tan estrechamente relacionadas unas con otras, que la primera cantidad definida necesitará unas cuantas definiciones adicionales para ser comprendida totalmente. Como un ejemplo, cuando se defina el elemento de un circuito, será más conveniente definirlo en términos de corriente y voltaje, y cuando se definan la corriente y el voltaje, ayudará mucho hacerlo en términos del elemento de un circuito. Ninguna de estas tres definiciones se puede entender bien a menos que todas se hayan establecido. Esto significa que la primera definición de elemento de circuito puede ser un poco inadecuada, pero luego se definirá corriente y voltaje en términos del elemento de un circuito, y finalmente, se regresará a definir con más cuidado lo que es un elemento de circuito.

Tabla 1.1 Unidades SI para las magnitudes físicas			
Sección	Magnitud	Unidad SI	Abreviatura
I	longitud	Metro	m
	masa	Kilogramo	kg
	tiempo	Segundo	s
	corriente	Amper	A
	ángulo	Radián	rad
II	área	metro cuadrado	m ²
	volumen	metro cúbico	m ³
	velocidad lineal	metro por segundo	m/s
	aceleración lineal	metro por segundo cuadrado	m/s ²
	velocidad angular	radián por segundo	rad/s
	aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s ²
III	frecuencia	hertz (1/s)	Hz
	fuerza	newton (kg·m/s ²)	N
	energía	joule (N·m)	J
	potencia	watt (J/s)	W
	carga	coulomb (A·s)	C
	voltaje	volt (W/A)	V
	flujo eléctrico	coulomb (A·s)	C
	capacitancia	farad (C/V)	F
	resistencia	ohm (V/A)	Ω
	conductancia	siemen (A/V)	S
	flujo magnético	weber (V·s)	Wb
	densidad de flujo magnético	tesla (Wb/m ²)	T
	inductancia	Henry (Wb/A)	H
intensidad de campo eléctrico	volt/metro	V/m	
IV	densidad de flujo eléctrico	coulomb/metro cuadrado	C/m ²
	intensidad de campo magnético	amper/metro	A/m
	torca	newton-metro	N·m
V	reactancia	ohm (V/A)	Ω
	impedancia	ohm (V/A)	Ω
	suceptancia	siemen (A/V)	S
	admitancia	siemen (A/V)	S
	potencia reactiva	voltamper reactivo (V·A)	var
	potencia aparente	voltamper (V·A)	VA

Sección I: Unidades básicas

Sección II: Unidades derivadas sin nombres especiales

Sección III: Unidades derivadas con nombres especiales

Sección IV: Unidades derivadas compuestas sin nombres especiales

Sección V: Cantidades especiales

En cuanto al sistema de unidades, hay poco de dónde elegir; el que se usará fue adoptado por el National Bureau of Standards en 1964; es el usado por todas las sociedades de ingeniería más importantes y es el lenguaje en el cual están escritos los libros de texto actuales. Este es el Sistema Internacional de Unidades (abreviado SI en todos los idiomas) adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas en 1960. El SI tiene seis unidades básicas: metro, kilogramo, segundo, amper, kelvin y candela. Este, por supuesto, es un “sistema métrico”; la mayor parte de los países con tecnología avanzada usan ya alguna forma de este sistema: ya es urgente que se establezca su uso en Estados Unidos.

A continuación se verán las definiciones de metro, kilogramo, segundo y amper. En la Tabla 1.1 anterior, se enlistan las magnitudes, unidades y abreviaturas estándar comúnmente usadas.

A finales del siglo XVIII el metro se definió exactamente como una diezmillonésima parte de la distancia desde el polo terrestre hasta el ecuador. La distancia se marcó por medio de dos rayas finísimas en una barra de platino e iridio que había sido enfriada a cero grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$, anteriormente centígrados). A pesar de que medidas más precisas han demostrado que dichas marcas en la barra no representan exactamente esa fracción del meridiano terrestre, hasta 1960 se aceptó internacionalmente que esas marcas definieran el metro patrón. En ese año, la Conferencia General basó una definición más precisa del metro (m) en un múltiplo de la longitud de onda de la radiación de la línea naranja del kriptón 86. En 1983, el metro se definió aún con más precisión como la distancia a la que viaja la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ de segundo (que se definirá en uno o dos segundos).

La unidad patrón de masa, el kilogramo (kg), se definió en 1901 como la masa de un bloque de platino guardado junto con el metro patrón en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Sévres, Francia. Esta definición fue confirmada en 1960. La masa de este bloque es de aproximadamente 0.001 veces la masa de 1m^3 de agua pura a 4°C .

La tercera unidad básica, el segundo (s), se definía antes de 1956 como $1/86\,400$ de un día solar medio. En ese entonces se definió como $1/31\,556\,925.9747$ del año trópico de 1900. Ocho años después, el segundo se definió más cuidadosamente como $9\,192\,631\,770$ períodos de la frecuencia de transición entre los niveles hiperfinos $F = 4, m_F = 0$ y $F = 3, m_F = 0$ del estado base $^2\text{S}_{1/2}$ del átomo de cesio 133, sin campos perturbadores externos. Esta última definición es permanente y más reproducible que la anterior; y sólo es comprensible para los estudiosos de la física atómica. Sin embargo, cualquiera de estas definiciones describe adecuadamente al segundo común y corriente que todos conocen.

La definición de la cuarta unidad básica, el amper (A), aparecerá más adelante, cuando el estudiante se familiarice con las propiedades básicas de la electricidad. Las dos unidades básicas restantes, el kelvin (K) y la candela (cd), no son de uso inmediato en análisis de circuitos.

El SI usa el sistema decimal para relacionar unidades mayores y menores que la unidad patrón y prefijos estándares para identificar varias potencias de diez:

Tabla 1.2 Potencias de diez		
Prefijo	Símbolo	Magnitud
Atto	a	10^{-18}
Femto	f	10^{-15}
Pico	p	10^{-12}
Nano	n	10^{-9}
Micro	μ	10^{-6}
Mili	m	10^{-3}
Centi	c	10^{-2}
Deci	d	10^{-1}
Deka	da	10^{+1}
Hecto	h	10^{+2}
Kilo	k	10^{+3}
Mega	M	10^{+6}
Giga	G	10^{+9}
Tera	T	10^{+12}
Peta	P	10^{+15}
Exa	E	10^{+18}

Los prefijos sombreados en el recuadro anterior son los que se usan con más frecuencia en la teoría de circuitos eléctricos. Es muy conveniente memorizar estos prefijos porque aparecerán con mucha frecuencia, ya sea en este documento o en otros de carácter científico. Así, un milisegundo (ms) es 0.001 segundo, y un kilómetro (km) es 1000 m. Ahora se ve que fue el gramo (g) lo que al inicio se definió como la unidad de masa. Y el kilogramo representaba simplemente 1000 g. En la actualidad, el kilogramo es nuestra unidad de masa, y si quisiéramos enredar las cosas podríamos decir que un gramo es un milikilogramo. Las combinaciones de varios prefijos, tales como milimicrosegundo, son inaceptables; lo que debe usarse en el término nanosegundo. Algo que también es oficialmente mal visto es el uso del término micra para 10^{-6} m; el término correcto es micrómetro (μm). Sin embargo, el ángstrom (\AA) sí se puede usar para 10^{-10} m.

Desafortunadamente, esta relación de potencias de 10 no está presente en el Sistema Británico de Unidades, que es el de uso común en Estados Unidos. Las unidades británicas fundamentales se definen en términos de las unidades SI como sigue:

1 pulgada es exactamente 0.0254 m, 1 libra-masa (lbm) es justo 0.453 592 37 kg, y el segundo es común a ambos sistemas.

Para finalizar el estudio de las unidades, se mencionarán las tres unidades derivadas usadas para medir fuerza, trabajo o energía, y potencia. El newton (N) es la unidad fundamental de fuerza, y es la fuerza que se requiere para imprimir una aceleración de un metro por segundo cada segundo (1 m/s^2) a una masa de 1 kg. Una fuerza de 1 N equivale a 0.22481 libras de fuerza (lbf), y un hombre promedio de 19 años de edad y 68 kg de masa, ejerce una fuerza de 667 N sobre la báscula.

La unidad fundamental de trabajo o energía es el joule (J), definido como un newton-metro (N-m). La aplicación de una fuerza constante de 1 N a lo largo de una distancia de un metro requiere un gasto de energía de 1 J. La misma cantidad de energía es la que se requiere para levantar un libro, que pesa alrededor de 10 N, a una altura de aproximadamente 10 cm. El joule es equivalente a 0.737 56 libra fuerza-pie (lbf-ft). Otras unidades de energía son la caloría (cal), igual a 4.1868 J; la unidad térmica Británica (Btu), que es igual a 1055.1 J, y el kilowatt-hora (kWh), igual a 3.6×10^6 J.

La última cantidad derivada que se definirá es la potencia, la rapidez con la que se realiza un trabajo o con la que se gasta energía. La unidad fundamental de potencia es el watt (W), definido como 1 J/s. Un watt equivale a 0.737 56 lbf-ft/s. También equivale a 1/745.7 caballos de potencia (hp), unidad que está cayendo en desuso en Ingeniería.

1.2 Leyes fundamentales

A continuación realizaremos una muy breve descripción de las principales Leyes Fundamentales con el propósito de comprender mejor el fenómeno de la electricidad.

1.2.1 Ley de Coulomb

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia, y veremos que una carga eléctrica ejerce una fuerza en otras cargas eléctricas. ¿Qué factores afectan la magnitud de esta fuerza? Para responder la pregunta, el físico francés Charles Coulomb analizó las fuerzas eléctricas en la década de 1780 con la ayuda de una balanza de torsión, que era muy similar a la que utilizó Cavendish cuando analizó la fuerza gravitacional.

1.2.1.1 Carga eléctrica

Para explicar como se origina la electricidad estática, hemos de considerar que la materia está hecha de átomos y los átomos de partículas cargadas, estos últimos compuestos por un núcleo formado por protones, que tienen una carga positiva, y neutrones que no tienen carga eléctrica neta; rodeado de una nube de electrones que tienen una carga negativa. Normalmente, la materia es neutra, tiene el mismo número de cargas positivas y negativas.

Algunos átomos tienen más facilidad para perder sus electrones que otros. Si un material tiende a perder algunos de sus electrones cuando entra en contacto con otro, se dice que es más positivo en la serie triboeléctrica. Si un material tiende a capturar electrones cuando entra en contacto con otro material, dicho material es más negativo en la *serie triboeléctrica*. Ordenar los materiales según esta propiedad se denomina *serie triboeléctrica*. Estos son algunos ejemplos de materiales ordenados de más positivo (o buenos dadores) a más negativo (o buenos captores): Piel de conejo, vidrio, pelo humano, nylon, lana, seda, papel, algodón, madera, ámbar, poliéster, poliuretano, vinilo (PVC), teflón.

El vidrio frotado con seda provoca una separación de las cargas, por que ambos materiales ocupan posiciones distintas en la *serie triboeléctrica*, lo mismo se puede decir del ámbar y del vidrio. Cuando dos materiales no conductores entran en contacto uno de los materiales puede capturar electrones del otro material. La cantidad de carga depende de la naturaleza de los materiales (de su separación en la *serie triboeléctrica*), y del área de la superficie que entra en contacto. Otro de los factores que intervienen es el estado de las superficies, si son lisas o rugosas (la superficie de contacto es pequeña). La humedad o impurezas que contengan las superficies proporcionan un camino para que se recombinen las cargas. La presencia de impurezas en el aire tiene el mismo efecto que la humedad.

De experimentos de frotación con distintos materiales y determinando las dos clases de carga y sus interacciones se concluye que:

- La materia contiene dos tipos de cargas eléctricas denominadas positivas y negativas.

- Los objetos cargados con cargas del mismo signo, se repelen, los objetos cargados con cargas de distinto signo, se atraen.
- Los objetos no cargados poseen cantidades iguales de cada tipo de carga. Cuando un cuerpo se frota la carga se transfiere de un cuerpo al otro, uno de los cuerpos adquiere un exceso de carga positiva y el otro, un exceso de carga negativa. En cualquier proceso que ocurra en un sistema aislado, la carga total o neta no cambia (se conserva).
- La carga eléctrica está cuantizada, es decir, existe en múltiplos enteros de la carga del electrón, $q = Ne$: Carga eléctrica = (número entero) (carga del electrón).
- La carga del electrón es de $-1.6 \cdot 10^{-19}$ C

Carga eléctrica en reposo

La carga eléctrica constituye una propiedad fundamental de la materia. Se manifiesta a través de ciertas fuerzas, denominadas electrostáticas, que son las responsables de los fenómenos eléctricos. Su influencia en el espacio puede describirse con el auxilio de la noción física de campo de fuerzas. El concepto de potencial hace posible una descripción alternativa de dicha influencia en términos de energías.

El término eléctrico, y todos sus derivados, tiene su origen en las experiencias realizadas por Tales de Mileto, un filósofo griego que vivió en el siglo VI antes de Cristo. Tales estudió el comportamiento de una resina fósil, el ámbar -en griego *elektrón*-, observando que cuando era frotada con un paño de lana adquiría la propiedad de atraer hacia sí pequeños cuerpos ligeros; los fenómenos análogos a los producidos por Tales con el ámbar o *elektrón* se denominaron fenómenos eléctricos y más recientemente fenómenos electrostáticos.

La *electrostática* es la parte de la física que estudia este tipo de comportamiento de la materia, se preocupa de la medida de la carga eléctrica o cantidad de electricidad presente en los cuerpos y, en general, de los fenómenos asociados a las *cargas eléctricas en reposo*. El desarrollo de la teoría atómica permitió aclarar el origen y la naturaleza de los fenómenos eléctricos; la noción de *fluido eléctrico*, introducida por Benjamín Franklin (1706-1790) para explicar la electricidad, fue precisada a principios de siglo al descubrirse que la materia está compuesta íntimamente de átomos y éstos a su vez por partículas que tienen propiedades eléctricas.

Como sucede con otros capítulos de la física, el interés de la electrostática reside no sólo en que describe las características de unas fuerzas fundamentales de la naturaleza, sino también en que facilita la comprensión de sus aplicaciones tecnológicas. Desde el pararrayos hasta la televisión una amplia variedad de dispositivos científicos y técnicos están relacionados con los fenómenos electrostáticos.

Carga eléctrica en movimiento

La parte de la física que se ocupa del estudio de este tipo de movimiento de las cargas eléctricas a través de un conductor recibe el nombre de *electrocinética*.

Las cargas en los conductores pueden moverse con cierta libertad. La corriente eléctrica constituye un movimiento continuo de las cargas libres. La cantidad de carga que circula por un conductor en la unidad de tiempo es la intensidad de corriente. Los responsables de mantener la corriente en un circuito eléctrico son los generadores eléctricos, los cuales suministran al circuito la energía precisa para ello. Dos Leyes de naturaleza experimental descubiertas por Ohm y Joule respectivamente aportan algunas relaciones que facilitan el estudio científico de la corriente eléctrica.

La característica esencial de los conductores, sean éstos sólidos, líquidos o gaseosos, consiste en que disponen de partículas cargadas que pueden moverse con bastante libertad bajo la acción de campos eléctricos. Cuando un conductor descargado se pone en contacto con un cuerpo cargado se produce un desplazamiento de la carga del uno a otro por efecto de las fuerzas eléctricas. Si ambos están aislados, el movimiento de las cargas libres durará unos instantes entre tanto el sistema de cargas encuentra una configuración de equilibrio en la cual las fuerzas eléctricas que se ejercen sobre cada una de las cargas se compensan mutuamente. Esto es lo que sucede cuando un hilo metálico se conecta por uno de sus extremos a uno solo de los bornes de una pila. Sin embargo, cuando se conecta el otro extremo del conductor al segundo borne, se produce un movimiento continuo de cargas en el conductor. Se tiene en tal caso una *corriente eléctrica*.

1.2.1.2 Ley de Coulomb

Charles Agoustin Coulomb (1736-1806) fue el primero en tratar, en el años 1785, los fenómenos eléctricos desde un punto de vista cuantitativo. Coulomb midió la fuerza que una esfera cargada ejerce sobre otra esfera también cargada mediante una *balanza de torsión* y después de numerosas experiencias encontró que:

La fuerza electrostática de atracción o repulsión entre dos cuerpos, es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

Aun cuando los fenómenos electrostáticos fundamentales eran ya conocidos en la época de Charles Coulomb, no se conocía aún la proporción en la que esas fuerzas de atracción y repulsión variaban. Fue este físico francés quien, tras poner a punto un método de medida de fuerzas sensible a pequeñas magnitudes, lo aplicó al estudio de las interacciones entre pequeñas esferas dotadas de carga eléctrica. El resultado final de esta investigación experimental fue la Ley que lleva su nombre y que describe las características de las fuerzas de interacción entre cuerpos cargados.

Cuando se consideran dos cuerpos cargados (supuestos puntuales), la intensidad de las fuerzas atractivas o repulsivas que se ejercen entre sí es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias que las separa, dependiendo además dicha fuerza de la naturaleza del medio que les rodea.

Como fuerzas de interacción, las fuerzas eléctricas se aplican en los respectivos centros de las cargas y están dirigidas a lo largo de la línea que los une.

La interpretación de la Ley de Coulomb

La expresión matemática de la Ley de Coulomb es:

$$F_e = K \frac{q \cdot q'}{r^2} \quad \text{ecuación 1.1}$$

en donde q y q' corresponden a los valores de las cargas que interaccionan tomadas con su signo positivo o negativo, r representa la distancia que las separa supuestas concentradas cada una de ellas en un punto y K es la constante de proporcionalidad correspondiente que depende del medio en que se hallen dichas cargas.

El hecho de que las cargas aparezcan con su signo propio en la ecuación 1.1 anterior da lugar a la existencia de dos posibles signos para la fuerza F_e , lo cual puede ser interpretado como el reflejo de los dos tipos de fuerzas, atractivas y repulsivas, características de la interacción

electrostática. Así, cargas con signos iguales darán lugar a fuerzas (repulsivas) de signo positivo, en tanto que cargas con signos diferentes experimentarán fuerzas (atractivas) de signo negativo. Consiguientemente el signo de la fuerza en la ecuación 1.1 expresa su sentido atractivo o repulsivo.

La constante de proporcionalidad K toma en el vacío un valor igual a

$$K = 8.9874 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad \text{ecuación 1.2}$$

esa elevada cifra indica la considerable intensidad de las fuerzas electrostáticas. Pero además se ha comprobado experimentalmente que si las cargas q y q' se sitúan en un medio distinto del aire, la magnitud de las fuerzas de interacción se ve afectada. Así, por ejemplo, en el agua pura la intensidad de la fuerza electrostática entre las mismas cargas, situadas a igual distancia, se reduce en un factor de 1/81 con respecto de la que experimentaría en el vacío. La constante K traduce, por tanto, la influencia del medio.

Finalmente, la variación con el inverso del cuadrado de la distancia indica que pequeños aumentos en la distancia entre las cargas reducen considerablemente la intensidad de la fuerza, o en otros términos, que las fuerzas electrostáticas son muy sensibles a los cambios en la distancia r .

Aplicación de la Ley de Coulomb

La Ley de Coulomb relaciona la magnitud de las fuerzas electrostáticas con las características del medio, reflejadas en su constante K , con el valor de las cargas interactuantes y con la distancia comprendida entre sus centros. Por tal motivo es posible averiguar uno de estos elementos si se conoce el resto.

Un átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón que se mueve en torno a él; sabiendo que sus cargas, iguales y de signo contrario, equivalen a $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ y que la intensidad de la fuerza atractiva que experimentan es de $8.2 \cdot 10^{-18} \text{ N}$, determinar el valor de la distancia media que los separa (radio de Bohr), ver Figura 1.1.

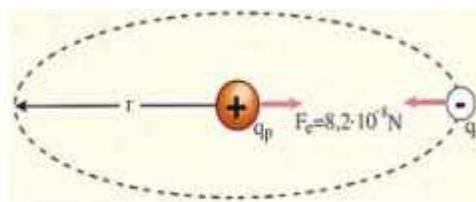


Figura 1.1. Átomo de hidrógeno y radio de Bohr.

De acuerdo con la Ley de Coulomb:

$$F = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \quad \text{ecuación 1.3}$$

La distancia entre dos cargas puede expresarse en función de la fuerza de interacción en la forma:

$$r = \sqrt{\frac{K \cdot Q \cdot q}{F}} \quad \text{ecuación 1.4}$$

En este caso $q_{e-} = -1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $q_{p+} = +1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; la fuerza F por ser atractiva se considera negativa: $F = -8.2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ y la constante (redondeada) K es la del vacío: $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$. Sustituyendo en la ecuación 1.4 anterior, resulta:

$$r = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1.60 \cdot 10^{-19})^2}{8.2 \cdot 10^{-8}}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 1.6^2 \cdot 10^9 \cdot 10^{-38}}{8.2 \cdot 10^{-8}}} = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

1.2.2 Leyes de Faraday

Michael Faraday descubrió en 1831 uno de los fenómenos más interesantes del electromagnetismo, las corrientes eléctricas producidas mediante campos magnéticos, a las que llamó *corrientes inducidas*. Desde entonces al fenómeno consistente en generar campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables se denomina *inducción electromagnética*.

1.2.2.1 Los experimentos de Faraday

Los experimentos que llevaron a Faraday al descubrimiento de la inducción electromagnética pueden ser agrupadas en dos categorías: experiencias con corrientes y experiencias con imanes. En primer lugar preparó dos solenoides, uno arrollado sobre el otro, pero aislados eléctricamente entre sí. Uno de ellos lo conectó a una pila y el otro a un galvanómetro y observó cómo cuando accionaba el interruptor del primer circuito la aguja del galvanómetro del segundo circuito se desplazaba, volviendo a cero tras unos instantes. Sólo al abrir y al cerrar el interruptor el galvanómetro detectaba el paso de una corriente que desaparecía con el tiempo. Además, la aguja se desplazaba en sentidos opuestos en uno y otro caso. Ver Figuras 1.2a y 1.2b.



Figura 1.2a Experimento de los solenoides



Figura 1.2b Experimento de los solenoides

En el segundo grupo de experiencias Faraday utilizó un imán recto y una bobina conectada a un galvanómetro. Al introducir bruscamente el imán en la bobina observó una desviación en la aguja, desviación que desaparecía si el imán permanecía inmóvil en el interior de la bobina. Cuando el imán era retirado la aguja del galvanómetro se desplazaba de nuevo, pero esta vez en sentido contrario. Cuando repetía todo el proceso completo la aguja oscilaba de uno a otro lado y su desplazamiento era tanto mayor cuanto más rápido era el movimiento del imán entrando y saliendo en el interior de la bobina. Lo mismo sucedía cuando mantenía quieto el imán y movía la bobina sobre él. Ver Figura 1.4



Figura 1.4 Experimento del imán y la bobina

La representación del campo magnético en forma de líneas de fuerza permitió a Faraday encontrar una explicación intuitiva para este tipo de fenómenos. Para que se produjera una corriente inducida en la bobina era necesario que las líneas de fuerza producidas por el imán fueran cortadas por el hilo conductor de la bobina como consecuencia del movimiento de uno u otro cuerpo. En el primer grupo de experiencias, las líneas de fuerza, al aparecer y desaparecer junto con la corriente debida a la pila, producían el mismo tipo de efectos.

Las experiencias anteriores a las de Faraday, al no tener en cuenta los aspectos dinámicos, o de cambio con el tiempo, de esta clase de fenómenos, no pudieron detectar este tipo de corrientes que aparecen en un circuito eléctrico sin que exista dentro del propio circuito ninguna pila que las genere.

1.2.2.2 Ley de inducción de Faraday

Independientemente de Faraday, Joseph Henry, en los Estados Unidos, había observado que un campo magnético variable produce en un circuito próximo una corriente eléctrica. Los resultados concordantes de las experiencias de ambos físicos pueden resumirse en un enunciado que se conoce como Ley de Faraday-Henry:

La fuerza electromotriz inducida en un circuito es proporcional a la rapidez con la que varía el flujo magnético que lo atraviesa.

O en forma matemática:

$$\varepsilon = - \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ecuación 1.5}$$

siendo ε la fuerza electromotriz inducida y $\Delta\phi$ la variación de flujo magnético que se produce en el intervalo de tiempo Δt . De acuerdo con esta ecuación 1.5, la magnitud de f.e.m. inducida coincide con lo que varía el flujo magnético por unidad de tiempo.

La presencia de la fuerza electromotriz \mathcal{E} en la Ley de Faraday-Henry en lugar de la intensidad de corriente (ambas son proporcionales entre sí), resalta una característica de la inducción, a saber, su capacidad para sustituir a un generador, es decir, para producir los mismos efectos que éste en un circuito eléctrico. Por su parte, el signo negativo recoge el hecho, observado experimentalmente por Faraday y Henry, de que aumentos ($\Delta\phi > 0$) y disminuciones ($\Delta\phi < 0$) de flujo magnético producen corrientes inducidas de sentidos opuestos.

Si no hay variación con el tiempo del flujo magnético que atraviesa un circuito, el fenómeno de la inducción electromagnética no se presenta. Tal circunstancia explica los fracasos de aquellos físicos contemporáneos de Faraday que pretendieron conseguir *corrientes inducidas* en situaciones estáticas, o de reposo, del circuito respecto del imán o viceversa.

Cuando la Ley de Faraday-Henry se aplica a una bobina formada por N espiras iguales toma la forma:

$$\mathcal{E} = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{ecuación 1.6}$$

siendo $\Delta\phi/\Delta t$ la variación del flujo magnético por unidad de tiempo para una sola espira en la bobina.

1.2.3 Ley de Lenz

Aunque la Ley de Faraday-Henry, a través de su signo negativo, establece una diferencia entre las corrientes inducidas por un aumento del flujo magnético y las que resultan de una disminución de dicha magnitud, no explica este fenómeno. Lenz (1904-1965), un físico alemán que investigó el electromagnetismo en Rusia al mismo tiempo que Faraday y Henry, propuso la siguiente explicación del sentido de circulación de las corrientes inducidas que se conoce como *Ley de Lenz*:

Las corrientes que se inducen en un circuito se producen en un sentido tal que con sus efectos magnéticos tienden a oponerse a la causa que las originó.

Así, cuando el polo norte de un imán se aproxima a una espira, ver Figura 1.3, la corriente inducida circulará en un sentido tal que la cara enfrentada al polo norte del imán sea también norte, con lo que ejercerá una acción magnética repulsiva sobre el imán, la cual es preciso vencer para que se siga manteniendo el fenómeno de la inducción. Inversamente, si el polo norte del imán se aleja de la espira, la corriente inducida ha de ser tal que genere un polo sur que se oponga a la separación de ambos. Sólo manteniendo el movimiento relativo entre espira e imán persistirán las corrientes inducidas, de modo que si se detiene el proceso de acercamiento o de separación cesarían aquéllas y, por tanto, la fuerza magnética entre el imán y la espira desaparecería.

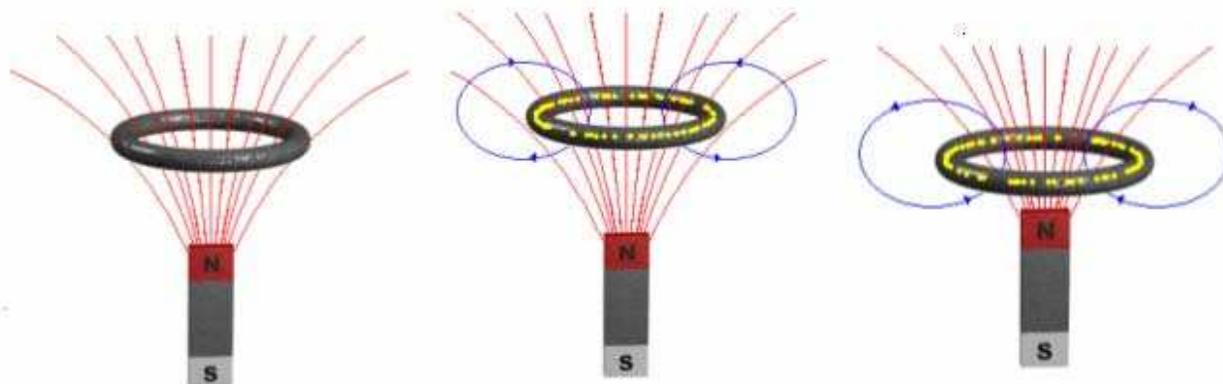


Figura 1.3 Aproximación del polo Norte de un imán a una espira

La Ley de Lenz, que explica el sentido de las corrientes inducidas, puede ser a su vez explicada por un principio más general, el *principio de la conservación de la energía*. La producción de una corriente eléctrica requiere un consumo de energía y la acción de una fuerza desplazando su punto de aplicación supone la realización de un trabajo. En los fenómenos de inducción electromagnética es el trabajo realizado en contra de las fuerzas magnéticas que aparecen entre espira e imán el que suministra la energía necesaria para mantener la corriente inducida. Si no hay desplazamiento, el trabajo es nulo, no se transfiere energía al sistema y las corrientes inducidas no pueden aparecer. Análogamente, si éstas no se opusieran a la acción magnética del imán, no habría trabajo exterior, ni por tanto cesión de energía al sistema.

1.2.4 Ley de Gauss

La Ley de Gauss es una relación elegante entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. Es más general que la Ley de Coulomb. La Ley de Gauss involucra una integral del campo eléctrico \mathbf{E} en cada punto de una superficie cerrada. La superficie es imaginaria, llamada "superficie Gaussiana", pero su forma y localización se eligen para poder visualizar la integral. Antes de analizar esta Ley, primero veremos el concepto de *flujo eléctrico*.

1.2.4.1 Flujo de campo eléctrico

Es una medida del número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie, en general se define como:

$$\phi = \int_{\text{superficie}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{ecuación 1.7}$$

Siendo $d\mathbf{A}$ el vector perpendicular a la superficie.

El flujo eléctrico se mide en $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ en el SI. Ver Figura 1.4.

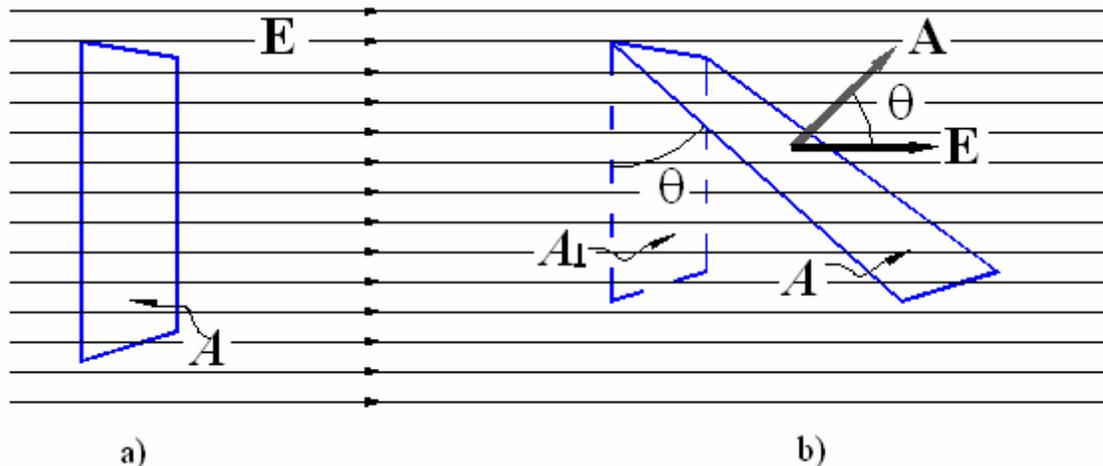


Figura 1.4 Un campo uniforme E (representado por las líneas de campo paralelas) que pasa a través de una superficie cuya área es: a) perpendicular a E , b) no perpendicular a E . La superficie punteada cuya área es A_{\perp} en b) es la proyección de A perpendicular al campo E .

Cuando el campo eléctrico E es uniforme tanto en magnitud como en dirección, las líneas de campo eléctrico que penetran perpendicularmente a una superficie de área A , es proporcional al producto de EA , es decir, el flujo eléctrico ϕ se obtiene de:

$$\phi = EA \quad \text{ecuación 1.8}$$

Si la superficie que se está considerando no es perpendicular al campo de manera que forma un ángulo θ con la normal a la superficie del área A , el flujo eléctrico a través de la superficie se obtiene de:

$$\phi = EA \cos \theta \quad \text{ecuación 1.9}$$

Estas dos últimas expresiones

se resumen si el flujo eléctrico se define como el producto escalar de E y A , es decir:

$$\phi = E \cdot A \quad \text{ecuación 1.10}$$

1.2.4.2 Aplicaciones de la Ley de Gauss

La electrostática es el estudio de los efectos de las cargas eléctricas en reposo y de los campos eléctricos que no cambian con el tiempo. Aunque es la más simple de las situaciones del electromagnetismo, es fundamental para comprender los modelos electromagnéticos más complicados. La explicación de muchos fenómenos naturales como los relámpagos y los principios de varias aplicaciones industriales, telecomunicaciones tales como los osciloscopios, copadoras, las impresoras de chorro de tinta, etc., se basan en la electrostática.

Ejemplo 1.1: Con base a la Figura 1.4, considerar una superficie plana de área de 1.25 m^2 , se rota en un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 8.9 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Calcule el flujo eléctrico ϕ a través de la superficie cuando el campo eléctrico esta:

- a) perpendicular a la superficie
- b) paralelo a la superficie
- c) haciendo un ángulo de 35° con el plano de superficie

$$A = 1.25 \text{ m}^2$$

$$E = 8.9 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

$$\theta = 35^\circ$$

Solución: Sustituyendo directamente los valores, se tiene

$$a) \phi = E A = (8.9 \cdot 10^5 \text{ N/C})(1.25 \text{ m}^2) = 11.12 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

$$b) \phi = E A \cos \theta, \theta = 90^\circ \therefore \phi = 0$$

$$c) \phi = E A \cos \theta = (8.9 \cdot 10^5 \text{ N/C})(1.25 \text{ m}^2)(\cos 35) = 9.11 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

1.2.5 Ley de Ampere

Llamada así en honor de quién, en 1825, creó los fundamentos teóricos del electromagnetismo, implica la descripción básica de la relación existente entre la electricidad y el magnetismo, desarrollada a través de afirmaciones cuantitativas sobre la relación de un campo magnético con la corriente eléctrica o las variaciones de los campos eléctricos que lo producen.

1.2.5.1 Ley de Biot y Savart

Poco tiempo después del descubrimiento de Oersted en 1819, donde la aguja de la brújula se desviaba a causa de la presencia de un conductor portador de corriente, Jean Baptiste Biot y Félix Savart informaron que un conductor de corriente estable produce fuerzas sobre un imán. De sus resultados experimentales, Biot y Savart fueron capaces de llegar a una expresión de la que se obtiene el campo magnético en un punto dado del espacio en términos de la corriente que produce el campo.

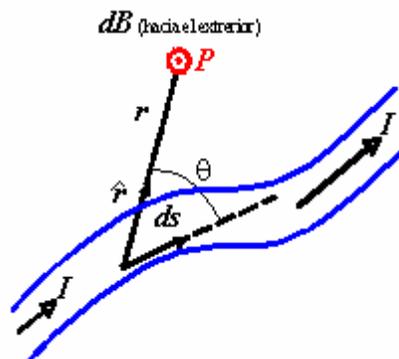


Figura 1.5 el campo magnético dB en el punto P debido a un elemento de corriente ds está dado por la Ley de Biot-Savart

La Ley de Biot-Savart establece que si un alambre conduce una corriente constante I , el campo magnético dB en un punto P debido a un elemento ds , Figura 1.5, tiene las siguientes propiedades:

1. El vector dB es perpendicular tanto a ds (el cual tiene la dirección de la corriente) como al vector unitario \hat{r} de desplazamiento dirigido desde el elemento hasta el punto P .

2. La magnitud dB es inversamente proporcional a r^2 , donde r es la distancia desde el elemento hasta el punto P .
3. La magnitud de dB es proporcional a la corriente y la longitud ds del elemento.
4. La magnitud de dB es proporcional a $\sin \theta$, donde θ es el ángulo entre el vector ds y \hat{r} .

La Ley de Biot-Savart puede ser resumida en la siguiente fórmula:

$$dB = k_m \frac{Id\mathbf{s} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad \text{ecuación 1.11}$$

donde k_m es una constante que en SI de unidades es exactamente 10^{-7} Wb/A·m. La constante k_m es por lo general escrita como $\mu_0/4\pi$, donde μ_0 es otra constante, llamada permeabilidad del espacio libre. Es decir,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot k_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb/A}\cdot\text{m} \quad \text{ecuación 1.12}$$

Por lo que la Ley de Biot-Savart, también puede escribirse como:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{s} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad \text{ecuación 1.13}$$

Es importante hacer notar que la Ley de Biot-Savart proporciona el campo magnético en un punto dado para un pequeño elemento del conductor. Para encontrar el campo magnético total B en algún punto debido a un conductor para tamaño finito, se deben sumar las contribuciones de todos los elementos de corriente que constituyen el conductor. Esto es, debe evaluarse B por la integración de la ecuación 1.13 anterior:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad \text{ecuación 1.14}$$

donde la integral se evalúa sobre todo el conductor, Esta expresión debe ser manejada con especial cuidado desde el momento que el integrando es una cantidad vectorial.

1.2.5.2 Aplicaciones de la Ley de Biot y Savart

Ejemplo 1.2: Un alambre de cobre desnudo del #10 puede conducir una intensidad de corriente de 50 A sin sobrecalentarse. Si se hace circular una intensidad de corriente de esta magnitud por una sección larga y recta de alambre del #10. Ver Figura 1.6. ¿A que distancia del eje del alambre la magnitud del campo magnético resultante es igual a 10^{-3} T?

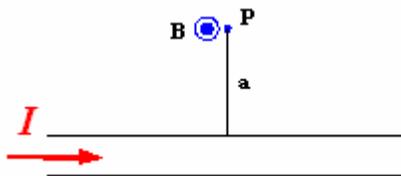


Figura 1.6 Ejemplo 1.2, aplicación Ley de Biot-Savart

Solución:

$I = 50 \text{ A}, B = 10^{-3} \text{ T}$

La magnitud del campo magnético debido a un alambre infinito a una distancia a , esta dado por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

despejando a y sustituyendo valores, se tiene

$$a = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi \cdot 10^{-3}} = 0.01 \text{ m}$$

1.2.5.3 Las líneas de B

El hecho de que las fuerzas magnéticas sean fuerzas de acción a distancia permite recurrir a la idea física de campo para describir la influencia de un imán o de un conjunto de imanes sobre el espacio que les rodea. Al igual que en el caso del campo eléctrico, se recurre a la noción de *líneas de fuerza (B)* para representar la estructura del campo. En cada punto las líneas de fuerza del campo magnético indican la dirección en la que se orientará una pequeña brújula (considerada como un elemento de prueba) situada en tal punto. Así las limaduras de hierro espolvoreadas sobre un imán se orientan a lo largo de las líneas de fuerza del campo magnético correspondiente y el espectro magnético resultante proporciona una representación espacial del campo. Por convenio se admite que las líneas de fuerza salen del polo Norte y se dirigen al polo Sur.

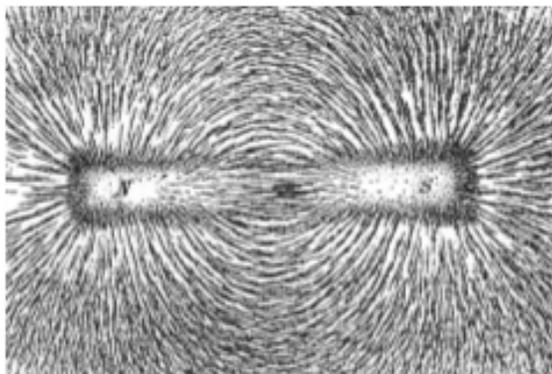


Figura 1.9 Limaduras de hierro espolvoreadas sobre un imán se orientan a lo largo de las líneas de fuerza del campo

Flujo magnético

La representación de la influencia magnética de un imán o de una corriente eléctrica en el espacio que les rodea mediante líneas de fuerza fue ideada por Faraday y aplicada en la interpretación de la mayor parte de sus experimentos sobre electromagnetismo. Mediante este tipo de imágenes Faraday compensaba su escasa preparación matemática, apoyándose así su enorme habilidad gráfica y su no inferior intuición científica. La noción de *flujo magnético* recoge esa tradición iniciada por Faraday de representar los campos mediante líneas de fuerza, pero añade, además, un significado matemático.

Cuando se observa, con la ayuda de limaduras de hierro, el campo magnético creado por un imán recto, se aprecia que, en los polos, las líneas de fuerza están más próximas y que se separan al alejarse de ellos. Dado que la intensidad del campo magnético B disminuye con la distancia a los polos, parece razonable relacionar ambos hechos y establecer por convenio una proporcionalidad directa entre la intensidad del campo B y la cantidad de líneas de fuerza que atraviesan una superficie de referencia unidad. Cuanto más apretadas están las líneas en una región, tanto más intenso es el campo en dicha región.

El número de líneas de fuerza del campo B que atraviesa una superficie unidad depende de cómo esté orientada tal superficie con respecto a la dirección de aquéllas. Así, para un conjunto de líneas de fuerza dado, el número de puntos de intersección o de corte con la superficie unidad será máximo para una orientación perpendicular y nulo para una orientación paralela. El número de líneas de fuerza del campo B que atraviesa perpendicularmente una superficie constituye entonces una forma de expresar el valor de la intensidad de dicho campo.

Se define el *flujo del campo magnético* B a través de una superficie, y se representa por la letra griega ϕ , como el número total de líneas de fuerza que atraviesan tal superficie. En términos matemáticos, para un campo magnético constante y una superficie plana de área S , el flujo magnético se expresa en la forma:

$$\phi = B \cdot S \cdot \cos \vartheta \quad \text{ecuación 1.15}$$

siendo ϑ el ángulo que forman las líneas de fuerza (el vector B) con la perpendicular a la superficie. Dicha ecuación 1.15 recoge, mediante el $\cos \vartheta$, el hecho de que el flujo varíe con la orientación de la superficie respecto del campo B y también que su valor dependa del área S de la superficie atravesada. Para $\vartheta = 0^\circ$ (intersección perpendicular) el flujo es máximo e igual a $B \cdot S$; para $\vartheta = 90^\circ$ (intersección paralela) el flujo es nulo.

La idea de flujo se corresponde entonces con la de «cantidad» de campo magnético que atraviesa una superficie determinada. En el Sistema Internacional se expresa en *wéber* (Wb). Un wéber es el flujo magnético que, al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 volt si se anula dicho flujo en 1 segundo por crecimiento uniforme.

1.2.5.4 Ley de Ampere

Un experimento simple realizado por primera vez por Oersted en 1820 demostró claramente el hecho de que un conductor que lleva una corriente produce un campo magnético. En este experimento, varias brújulas se colocan en un plano horizontal cercanas a un alambre largo vertical.

Cuando no existe corriente en el alambre, todas las brújulas apuntan en la misma dirección (misma del campo terrestre) como se esperaría. Sin embargo, cuando el alambre lleva una gran corriente estable, las brújulas necesariamente se desviarán en la dirección tangente a un círculo. Estas observaciones demuestran que la dirección B es congruente con la regla de la mano derecha.

"Si se toma el alambre con la mano derecha, de tal forma que el dedo pulgar apunte en la dirección de la corriente, los dedos curvados definirán la dirección de B ".

Cuando la corriente se invierte, necesariamente las brújulas se invertirán también. Puesto que las brújulas apuntan en la dirección de B , se concluye que las líneas de B forman círculos alrededor del alambre. Por simetría, la magnitud de B es la misma en cualquier lugar sobre una trayectoria circular que esté centrada en el alambre y que se encuentre en un plano perpendicular al alambre. Si se varía la corriente y la distancia al alambre, se encuentra que B es proporcional a la corriente e inversamente proporcional a la distancia al alambre.



Figura 1.7 Regla de la mano derecha para un conductor rectilíneo, en la determinación de la dirección del campo magnético

Ahora se evaluará el producto $B \cdot ds$ y se sumarán estos productos sobre una trayectoria circular centrada en el alambre. A lo largo de esta trayectoria, los vectores ds y B son paralelos en cada punto, así que $B \cdot ds = Bds$. Además, B es constante en magnitud sobre este círculo. Por lo tanto la suma de los productos Bds sobre la trayectoria cerrada, la cual es equivalente a la integral de $B \cdot ds$ está dada por:

$$\oint B \cdot ds = B \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

donde

$$\oint ds = 2\pi r \quad \text{ecuación 1.16}$$

es la circunferencia del círculo.

Este resultado, conocido como Ley de Ampere, fue encontrado para el caso especial de una trayectoria circular alrededor del alambre. Sin embargo, el resultado puede aplicarse en el caso general en el que una trayectoria cerrada sea atravesada por una corriente estable, es decir, **la Ley de Ampere establece que la integral de línea de $B \cdot ds$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual $\mu_0 I$, donde I es la corriente estable total que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada.**

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 I$$

ecuación 1.17

Donde:

$B = \mu \cdot H$ que es la densidad de flujo magnético, su unidad es Weber/metro², Tesla (T)

H: Intensidad de campo magnético: que representa el esfuerzo que ejerce la corriente para establecer un campo magnético. Su unidad es (amper-vuelta) / metro (A·V/m)

μ : Permeabilidad magnética del material: que representa el esfuerzo que realiza la corriente para establecer un campo magnético en un material dado. Su unidad es Henrio/metro (H/m).
Donde: μ_0 : Permeabilidad del espacio libre = $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$. La permeabilidad de cualquier otro material comparada con la permeabilidad del espacio libre, recibe el nombre de permeabilidad relativa y es = $\mu_r = \mu / \mu_0$

La Ley de Ampere es válida sólo para corrientes estables. Se utiliza sólo para el cálculo de campos magnéticos de configuraciones de corriente con un alto grado de simetría.

Ejemplo 1.3: Un cable recto en una casa, lleva corriente alterna la cual tiene un máximo de 20 amperes. Calcule la inducción magnética máxima a una distancia de 1m del alambre.

Solución (completar): Esto es una aplicación de la Ley de Ampere, la inducción magnética a una distancia R de un alambre que lleva una corriente i , se calcula usando la expresión integral que se indica, en la cual el camino c es una curva cerrada. Conocemos el valor de μ_0 ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$) y consideraremos a c como un círculo de radio R y con centro en el alambre, lo cual permite reducir a:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \text{ la expresión de la Ley de Ampere a } \int_C B \cos \theta dl = \int_C B dl \quad \text{ecuaciones 1.18}$$

Esto pues los vectores B y dl son colineales y $\theta = 0^\circ$, ver Figura 1.7. Además el vector de campo B es constante a lo largo del camino c , de modo que finalmente:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Reemplazando los datos encontramos que la intensidad de la inducción magnética a 1m del alambre es:

$B = \text{¿} \underline{\hspace{2cm}} \text{ Weber/m}^2\text{?}$, valor que es un orden de magnitud $\underline{\hspace{2cm}}$ que la intensidad del campo magnético de la Tierra, el cual tiene una intensidad del orden de $5 \cdot 10^{-5}$ Weber/m²

Nota: (complete el cálculo del valor de $|B|$ y la frase que compara las intensidades del campo del alambre con el de la Tierra).

1.2.5.5 Solenoides y Tiroides

Un solenoide es, en esencia, un conjunto de espiras iguales y paralelas de hilo conductor dispuestas a lo largo de una determinada longitud, más grande comparada con su diámetro, que son recorridas por la misma intensidad de corriente. Si tomamos un solenoide, lo curvamos y

pegamos sus extremos obtenemos un anillo o toroide.

En la Figura 1.8 vemos un solenoide recto cilíndrico a) y un solenoide recto prismático b). Hay también solenoides de estructura toroidal, no en forma recta sino cerrado sobre sí mismos, de sección cilíndrica o rectangular.

El espectro magnético del campo creado por un solenoide se parece más aún al de un imán recto que el debido a una sola espira. La regla que permite relacionar la polaridad magnética del solenoide como imán con el sentido convencional de la corriente que circula por él es la misma que la aplicada en el caso de una sola espira.

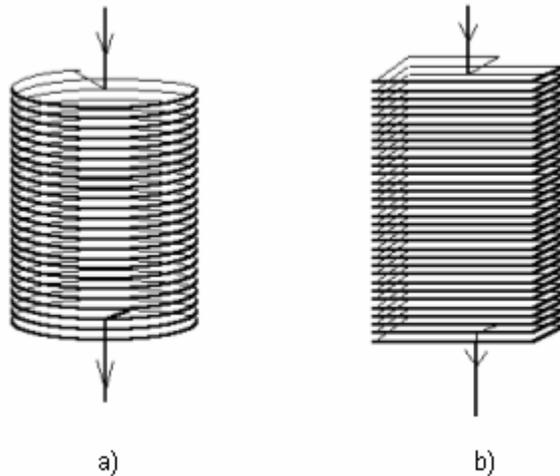


Figura 1.8 Solenoide recto cilíndrico y un solenoide recto prismático

En un toroide, con un diámetro grande en relación al diámetro de las espiras, pueden obtenerse campos muy intensos, totalmente confinados dentro del dispositivo.

Estos campos magnéticos, creados por la circulación de corriente, son indistinguibles de los que se observan alrededor de un imán natural o artificial. Se trata del mismo fenómeno. Esto se utiliza extensamente para construir electro-imanés, dispositivos que se comportan como imanes, sólo cuando se les hace circular una corriente eléctrica.

Si la dirección y sentido de una corriente coinciden con el avance de un tornillo, (de rosca derecha), la dirección del campo magnético coincide con el sentido de giro del mismo.

1.3 Ecuaciones básicas del electromagnetismo (La síntesis de Maxwell)

El escocés James Clerk Maxwell, alumno de Faraday, fue posiblemente el más imaginativo de los físicos del siglo XIX. En 1873 publicó la monumental obra *Tratado de electricidad y magnetismo*, en la que presentó una síntesis de los conocimientos de este tema. Maxwell formuló matemáticamente la Ley de Faraday. La síntesis fue hecha en términos de un conjunto de ecuaciones, conocidas como las ecuaciones de Maxwell, que contenían como fondo físico los descubrimientos de Oersted, Ampere, Faraday y otros científicos. El gran físico vienés Ludwig Boltzmann exclamó al leer las ecuaciones de Maxwell: "¿Fue un Dios quien trazó estos signos?".

El experimento de Oersted (1820) había demostrado la existencia de efectos magnéticos debidos a cargas en movimiento. Los descubrimientos de Faraday (1831) habían puesto de manifiesto que campos magnéticos variables con el tiempo dan lugar a un movimiento de cargas eléctricas en los

conductores. Además, la explicación de Faraday de estos fenómenos llamados de inducción había introducido por primera vez en la historia de la física la noción de campo magnético representado por un conjunto de líneas de fuerza. Medio siglo antes, Charles Coulomb (1785) había descrito en forma de Ley el modo en que las cargas eléctricas se atraen entre sí. Estos cuatro elementos fundamentales sirvieron de base a Maxwell para iniciar la síntesis de los fenómenos eléctricos y de los fenómenos magnéticos entonces conocidos y su explicación dentro de una amplia teoría conocida como *teoría del electromagnetismo*.

Apoyado en una enorme habilidad matemática, Maxwell empezó dando forma de ecuaciones a las observaciones de Faraday y a su noción de campo magnético. Las fuerzas entre cargas en reposo se beneficiarían pronto de una representación semejante en forma de campos eléctricos o electrostáticos. Este proceso de elaboración teórica le permitió finalmente describir lo esencial de los fenómenos electromagnéticos en cuatro ecuaciones, que se denominan *ecuaciones de Maxwell*. La primera describe cómo es el campo eléctrico debido a cargas en reposo; la segunda traduce en forma matemática la imposibilidad de separar los polos magnéticos de un imán; la tercera expresa en términos de campos magnéticos y corrientes eléctricas el descubrimiento de Oersted y la cuarta recoge la aportación de Faraday. La virtud de tales ecuaciones es que en ellas aparecen a primera vista los campos eléctricos **E** y magnético **B** y su forma simple y rica a la vez permite relacionarlas entre sí para obtener nuevos resultados y predecir nuevas consecuencias.

Además de resumir en un solo cuerpo de conocimientos la electricidad y el magnetismo, la teoría de Maxwell abrió nuevos caminos al conocimiento de la naturaleza y a sus aplicaciones. Las ondas electromagnéticas, que son la base de las actuales telecomunicaciones, como la radio o la televisión, constituyeron la predicción más interesante de esta síntesis de Maxwell.

Forma Diferencial	Forma integral	Comentario
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$	Ley de Faraday-Lenz generalizada relaciona el flujo del campo magnético con el campo eléctrico. La integral de circulación del campo eléctrico es la variación del flujo magnético
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$	Ley circuital de Ampere generalizada: expresa como las líneas de campo magnético rodean una superficie por la que circula una corriente o hay una variación del flujo eléctrico. La integral de circulación del campo eléctrico es proporcional a la corriente y la variación del flujo eléctrico
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_r$	Ley de Gauss: el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	Ley de Gauss para el magnetismo: implica la no existencia de monopolos magnéticos, ya que en una superficie cerrada el número de líneas de campo que entran equivale al número de líneas que salen.

Las ondas electromagnéticas

De las ecuaciones de Maxwell se deduce que el campo magnético y el campo eléctrico pueden estar interactuando permanentemente si uno de ellos varía con el tiempo. Así, el movimiento acelerado de un sistema de cargas produce un campo magnético variable, el cual a su vez genera campos eléctricos. Pero si éstos se producen tuvieron que partir de cero; tal variación del campo eléctrico produce a su vez un campo magnético y así repetidamente. Esta sucesión oscilante de campos eléctricos y magnéticos viajando por el espacio se denomina *onda electromagnética*.

A partir de sus ecuaciones, Maxwell anticipó que las ondas electromagnéticas deberían propagarse en el vacío a una velocidad igual a la velocidad de la luz. Las predicciones de Maxwell fueron confirmadas experimentalmente por Hertz, quien generó y detectó este tipo de ondas, observando que su comportamiento era idéntico al de las ondas luminosas de la Óptica.

Desde las ondas de radio hasta los rayos gamma, pasando por las ondas luminosas, una amplia gama de ondas electromagnéticas constituyen el llamado espectro electromagnético hoy conocido. Todas ellas tienen la misma naturaleza y sólo se diferencian en su frecuencia, es decir, en el número de oscilaciones que se producen en cada segundo en estos campos viajeros. La energía de las ondas electromagnéticas es tanto mayor cuanto mayor es su frecuencia. La luz con sus colores constituye simplemente la porción limitada del espectro electromagnético, al cual el ojo humano es sensible.

CAPÍTULO
2

ELEMENTOS DE CIRCUITOS

2.0 ELEMENTOS DE CIRCUITOS

Es importante establecer la diferencia entre un dispositivo físico en sí y el modelo matemático que lo representa y que se usará para analizar su comportamiento en un circuito. A partir de este momento debe entenderse que la expresión *elemento de circuito* se refiere al modelo matemático. La elección de un modelo en particular para cualquier dispositivo real debe basarse en datos experimentales, o en la experiencia; en general se supondrá que esta elección ya ha sido hecha.

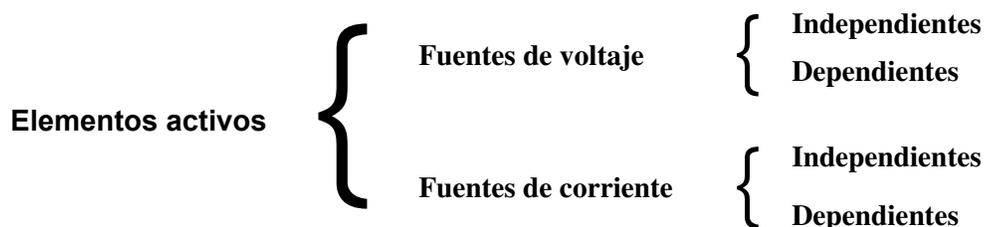
2.1 Elemento simple

Un elemento simple de un circuito es el modelo matemático de un dispositivo eléctrico de dos terminales, y que se puede caracterizar completamente por su relación voltaje-corriente pero no puede subdividirse en otros dispositivos de dos terminales.

2.2 Elementos activos

Se dice que un elemento es activo, si es capaz de entregar o generar potencia a algún dispositivo externo, tal es el caso de las fuentes de voltaje y corriente, las cuales a su vez se pueden clasificar en *fuentes independientes*, porque lo que pasa en el resto del circuito no afecta los valores asignados a dichas fuentes; esto no ocurre con la otra clase de fuente, la *fente controlada o dependiente*, en la que el valor esta determinado por un voltaje o una corriente presente en algún otro lugar del sistema eléctrico en consideración. Dentro de las fuentes más conocidas de energía se encuentran las baterías y los generadores. Matemáticamente un elemento activo debe cumplir la siguiente relación:

$$W = \int_{-\infty}^t v \cdot i dt > 0 \quad \text{ecuación 2.1}$$



2.3 Elementos pasivos

Se considera que un elemento es pasivo si sólo es capaz de recibir o absorber potencia, el mejor ejemplo es la resistencia, sin embargo existen algunos elementos pasivos que son capaces de almacenar cantidades finitas de energía y luego devolverlas a algún elemento externo. Matemáticamente un elemento pasivo debe cumplir con la siguiente relación:

$$W = \int_{-\infty}^t v \cdot i dt \geq 0 \quad \text{ecuación 2.2}$$

Elementos pasivos {

- Resistencia
- Inductancia (bobina ideal)
- Condensador

2.4 Circuito

A la interconexión de dos o más *elementos simples* de un circuito se le llama *red eléctrica*. Si la red eléctrica contiene por lo menos una trayectoria cerrada, entonces es un *circuito eléctrico*. Todo circuito es una red, pero no toda red es un circuito.

2.4.1 Circuito con elementos en serie

Si dos o más elementos de un circuito se conectan de tal modo que cada elemento tenga la misma corriente que fluya por él, estarán en serie. En la Figura 2.1, los elementos se conectan extremo a extremo, en forma de cadena. Esta configuración representa sólo una trayectoria para la corriente que fluye por el circuito.

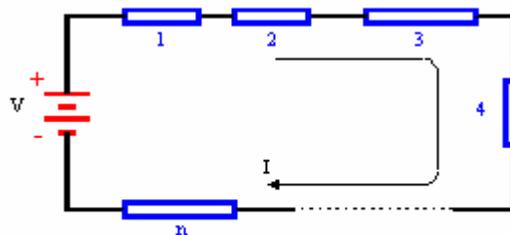


Figura 2.1 Elementos conectados en serie.

2.4.2 Circuito con elementos en paralelo

Si se conectan los elementos de modo que se presente el mismo voltaje en las terminales de ellos, se dice que los elementos están conectados en paralelo. Figura 2.2.

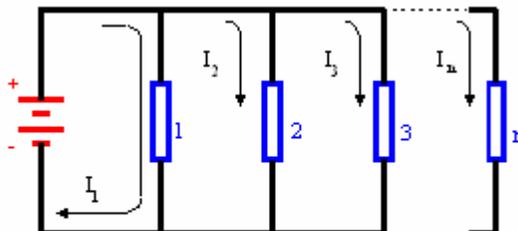


Figura 2.2 Circuitos con elementos en paralelo

2.4.3 Circuitos serie-paralelo

En estos circuitos, se encuentran elementos conectados en serie y/o paralelo dentro de la red total del circuito; en los cuales para calcular los valores equivalentes, se reducen los elementos en serie o paralelo dependiendo de la complejidad del arreglo del circuito, Figura 2.3.

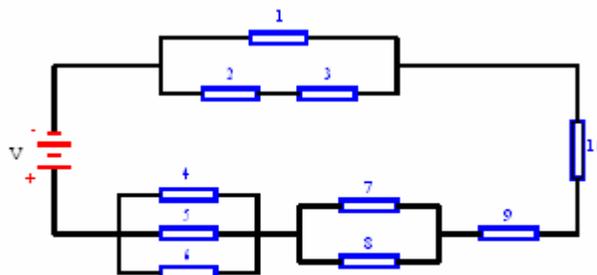


Figura 2.3 Circuito con elementos en serie-paralelo

2.4.4 Circuitos con elementos que no están conectados en serie ni en paralelo

En el circuito siguiente Figura 2.4 se puede observar que ningún elemento está conectado en serie o paralelo con algún otro, en este caso para obtener los valores equivalentes, se recurre a la transformación de configuraciones delta-estrella ó estrella-delta.

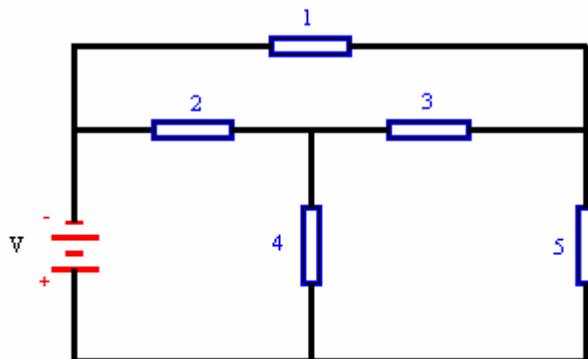


Figura 2.4 Circuitos con elementos que no están conectados en serie ni en paralelo

INTENSIDAD DE CORRIENTE Y RESISTENCIA

3.0 INTENSIDAD DE CORRIENTE Y RESISTENCIA

3.1 Intensidad de corriente eléctrica

En forma general la intensidad instantánea de corriente es igual a:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \text{ecuación 3.1}$$

Como convención se ha tomado como sentido positivo de la corriente, el sentido de las cargas positivas. Esto se debe a que al principio de las investigaciones sobre electricidad se pensaba que la corriente viajaba de lo positivo hacia lo negativo, ahora sabemos que en los conductores metálicos la corriente es el movimiento de los electrones que son atraídos fuera de sus orbitas, contrario a lo que se había establecido, pero se optó por esta convención por ser la aceptada en los textos de análisis de circuitos. Para entender mejor estos conceptos podemos observar la Figura 3.1 donde se muestran dos corrientes equivalentes:

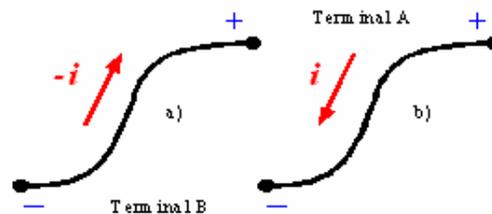


Figura 3.1 Dos maneras de representar la misma corriente

En la parte a) tenemos una corriente que tiene sentido contrario al de nuestra convención ya que las cargas tienen un movimiento que parte de un terminal negativo a uno positivo, esta es la forma en que se mueven los electrones, por lo tanto esta corriente tiene un valor negativo, por otro lado en la parte b) se tiene una corriente que va de un terminal positivo a uno negativo por lo tanto esta corriente cumple con nuestra convención y tiene un valor positivo. Cuando una corriente eléctrica pasa por un elemento eléctrico, la corriente se representa por una letra *i* o *I* dependiendo de si es una corriente variable o constante en el tiempo, además es necesario trazar una flecha que identifique el sentido que esta tenga, así como se muestra en la siguiente Figura 3.2.



Figura 3.2 Representación de la corriente

En la definición de corriente eléctrica dada en la ecuación 3.1 se puede observar que esta definida como una función en el tiempo, por lo tanto existen muchos tipos de corriente eléctrica, los de uso común son los siguientes:

Corriente Eléctrica Constante (DC): Esta es la corriente eléctrica utilizada en la mayoría de los circuitos electrónicos, ver Figura 3.3.

Corriente Eléctrica Alterna (AC): Es la corriente domestica utilizada en la mayoría de los lugares del mundo, ver Figura 3.4.

Corriente Exponencial y Subamortiguada: Se encuentran muy a menudo, aunque en la mayoría de los casos no son deseadas, estas corrientes son producidas principalmente cuando se opera un interruptor para cerrar un circuito que se encuentra energizado, ver Figuras 1.23 y 1.24.

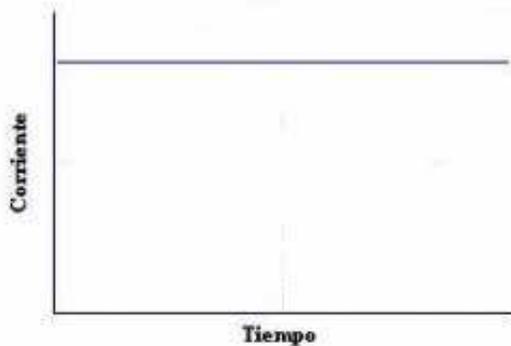


Figura 3.3 Corriente c.d.

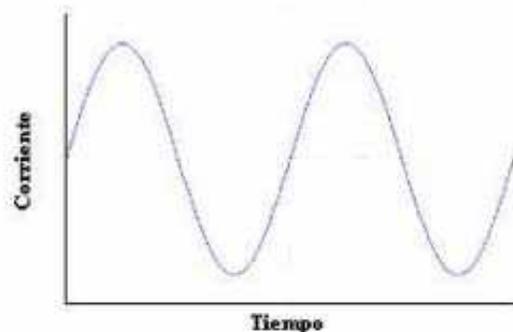


Figura 3.4 Corriente a.c.

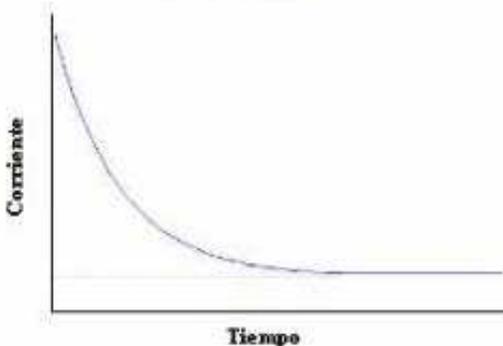


Figura 3.5 Corriente Exponencial

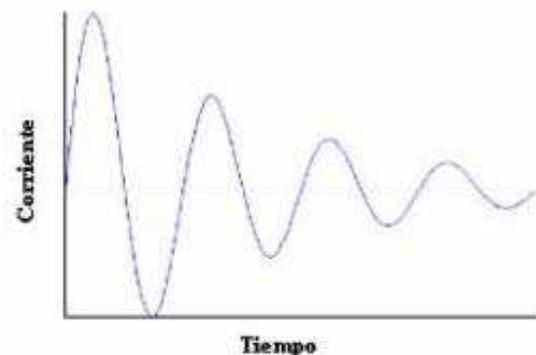


Figura 3.6 Subamortiguada

3.2 Resistencia, resistividad y conductividad

Cuando fluye una carga eléctrica por un material dado, experimenta una oposición al flujo de electrones. Esa oposición se denomina *resistencia eléctrica*.

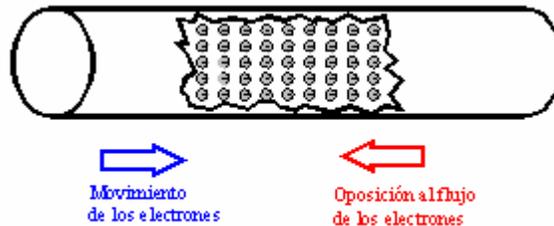


Figura 3.7 Resistencia eléctrica

La resistencia que opone todo conductor al paso de una corriente eléctrica es una propiedad que depende de la longitud, área ó sección transversal, material del conductor y la temperatura en la que opera. A una temperatura constante la resistencia de un material es:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \text{ecuación 3.2}$$

En donde R es la resistencia en ohms (Ω), ρ es la **resistividad** del material en ohms·mm²/m, l es la longitud en metros o centímetros y "A" es el área de corte transversal del conductor en metros cuadrados ó centímetros cuadrados.

Tabla 3.1 Resistividad "ρ" y Conductividad "γ" de conductores a 20 °C					
Material	ρ $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$	Material	ρ $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$
Acero dulce	0.1300	7.7	Latón Ms 63	0.7100	14.00
Aluminio	0.0278	36	Magnesio	0.0435	23.00
Antimonio	0.4170	2.4	Manganina	0.4230	2.37
Cadmio	0.0760	13.1	Mercurio	0.9410	1.063
Carbón	40.0000	0.025	Níquel	0.0870	11.50
Cobre	0.0175	57	Niquelina	0.5000	2.00
Constantan	0.4800	2.08	Oro	0.0222	45.00
Cromo-Ni-Fe	0.1000	10	Plata	0.0160	62.50
Estaño	0.1200	8.3	Plata alemana	0.3690	2.71
Hierro fundido	1.0000	1	Platino	0.1110	9.00
Hierro (puro)	0.1000	10	Plomo	0.2080	4.80
Grafito	8.0000	0.125	Tungsteno	0.0590	17.00
Latón Ms 58	0.0590	17	Zinc	0.0610	16.50

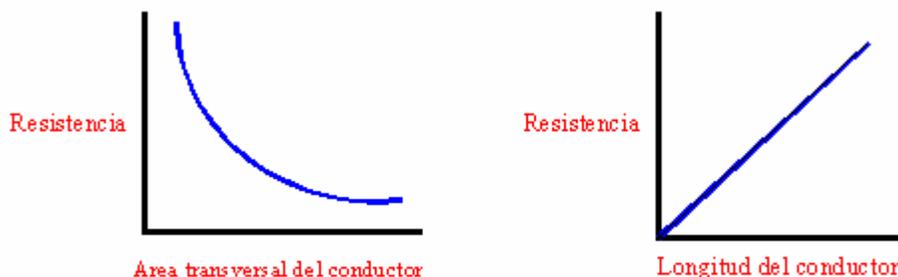


Figura 3.8 Gráficas de Resistencia vs. Área transversal, Longitud de un conductor

Tabla 3.2 Resistividad “ρ” de Aislantes			
Material	Ω·cm	Material	Ω·cm
Aceite de parafina	10 ¹⁸	Mica	10 ¹⁷
Agua de mar	10 ⁶	Parafina (pura)	10 ¹⁸
Agua destilada	10 ⁷	Plexiglás	10 ¹⁵
Ámbar comprimido	10 ¹⁸	Poliestireno	10 ¹⁸
Baquelita	10 ¹⁴	Porcelana	10 ¹⁴
Caucho (hule) duro	10 ¹⁶	Tierra húmeda	10 ⁸
Mármol	10 ¹⁰	Vidrio	10 ¹⁵

El término *conductancia* se usa para describir el grado de eficacia con que un material permite el flujo de la corriente. Cuanto más alta sea la clasificación de conductancia de un material, mayor cantidad de corriente conducirá. La unidad de medida es el *siemen* (anteriormente *mho*), que se abrevia S.

Matemáticamente la conductancia es definida como la inversa (recíproca) de la resistencia y se designa por la letra G:

$$G = \frac{1}{R} = R^{-1} \quad \text{ecuación 3.3}$$

Ejemplo 3.1:

Hallar la resistencia que tiene un conductor de cobre de calibre 8 AWG de área circular igual a $8.37 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ y 50 metros de longitud.

Datos:

Área = $8.37 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

Longitud = 50 m

$\rho = 0.0175 \text{ } \Omega\text{-mm}^2/\text{m}$

Solución:

La fórmula que usaremos, de acuerdo a los datos que tenemos es:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

En primer lugar debemos convertir el área del conductor a mm^2 ,

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= 1000 \text{ mm} \\ 1 \text{ m}^2 &= 1 \times 10^6 \text{ mm}^2 \\ 8.37 \times 10^{-6} \text{ m}^2 &\left(\frac{1 \times 10^6 \text{ mm}^2}{1 \text{ m}^2} \right) = 8.37 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos todos los datos en la fórmula de R

$$R = \frac{(0.0175 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m})(50\text{m})}{8.37 \text{ mm}^2} = 0.1045 \Omega$$

3.3 Ley de Ohm

En un conductor el movimiento de cargas eléctricas es consecuencia de la existencia de una diferencia de potencial entre sus extremos. Por ello la intensidad de corriente que circula por el conductor y el voltaje o diferencia de potencial deben estar relacionadas. Otros fenómenos de la física presentan una cierta semejanza con la conducción eléctrica; así el flujo de calor entre dos puntos depende de la diferencia de temperaturas entre ellos y la velocidad de caída de un cuerpo por un plano inclinado es función de la diferencia de alturas.

Ese tipo de analogías, y en particular la relativa a la conducción del calor, sirvió de punto de partida al físico alemán Georg Simon Ohm (1787-1854) para investigar la conducción eléctrica en los metales. En 1826 llegó a establecer **que en los conductores metálicos el cociente entre la diferencia de potencial entre sus extremos y la intensidad de corriente que lo atraviesa es una cantidad constante, o en otros términos, que ambas magnitudes son directamente proporcionales**. Esta relación de proporcionalidad directa entre voltaje e intensidad de corriente recibe el nombre de *Ley de Ohm*.

Representando, como es habitual en electrocinética, el voltaje por V y no por ΔV , la Ley de Ohm se puede escribir en la forma:

$$I = G \cdot V$$

donde G es una constante característica de cada conductor que recibe el nombre de *conductancia*.

3.4 Resistencias en serie y paralelo

Existen dos modos fundamentales de conectar o asociar las resistencias entre sí, en serie y en paralelo o derivación. Se denomina *resistencia equivalente* de una asociación de resistencias a aquella resistencia única por la que podría sustituirse la asociación sin alterar la intensidad que circula por el circuito.

Asociación de resistencias en serie

En la *asociación en serie* las resistencias se conectan una tras otra de modo que por todas ellas pasa la misma intensidad de corriente. Como el de la Figura 3.9, en el cual la resistencia total o equivalente R_{eq} ante la fuente es igual a la suma de los valores de las resistencias individuales.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

Siendo R_{eq} = Resistencia equivalente del conjunto serie constituido por las resistencias $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$

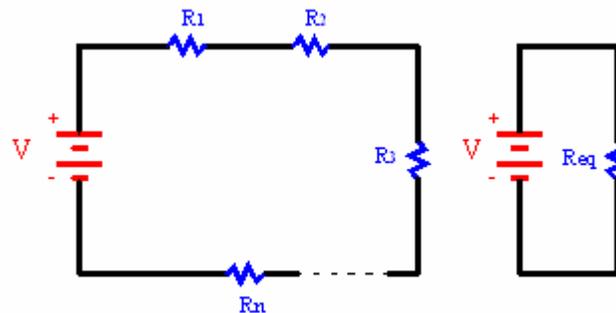


Figura 3.9 Asociación de resistencias en serie y su resistencia

Diferencia de potencial

La diferencia de potencial total en bornes de un conjunto serie de resistencias es igual a la suma de las caídas de potencial individuales en bornes de cada una de ellas.

Intensidad de corriente

La corriente que circula es la misma para todos los elementos.

Asociación de resistencias en paralelo

En la *asociación en paralelo* la conexión se efectúa uniando los dos extremos de cada una de ellas a un mismo par de puntos. En el circuito en paralelo, Figura 3.10, la resistencia equivalente es igual a la inversa de la suma de las recíprocas de los valores de las resistencias individuales. Se puede obtener por cualquiera de las siguientes fórmulas:

Para el caso de dos resistencias: Para el caso de tres resistencias ó más:

$$R_{eq} = \frac{(R_1)(R_2)}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

ecuaciones 3.6

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

Siendo R_{eq} = resistencia equivalente del conjunto paralelo constituido por las resistencias $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$. La resistencia equivalente en paralelo siempre será de un valor menor que el de la resistencia del valor más bajo del conjunto.

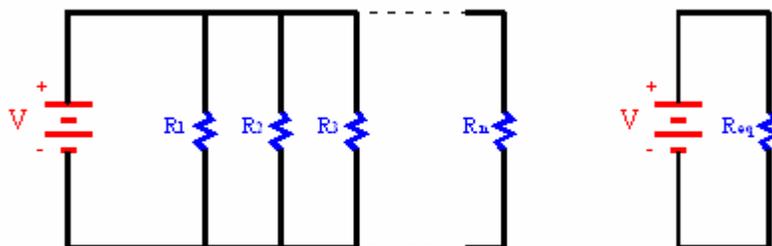


Figura 3.10 Asociación de resistencias en paralelo y su resistencia

Diferencia de potencial

La diferencia de potencial en bornes de asociación en paralelo es igual a la diferencia de potencial en bornes de uno cualquiera de sus elementos. Todas las ramas de una asociación en paralelo se hallan al mismo voltaje o diferencia de potencial

Intensidad de corriente

La suma de las intensidades de corriente que circulan por cada rama es igual a la intensidad total de la corriente en la línea. La intensidad en cada rama es inversamente proporcional a su resistencia.

CAPÍTULO 4

CAPACITANCIA

4.0 CAPACITANCIA

4.1 Capacitancia

La capacitancia es la propiedad de almacenar energía en forma de carga o campo eléctrico, es proporcional a la constante dieléctrica del material entre las placas y al área transversal del material conductor que conforman el capacitor, e inversamente proporcional a la distancia que separa las partes conductoras.

Los capacitores se clasifican por su forma (geométrica) en: planos, cilíndricos, esféricos. Y por el dieléctrico utilizado de: cerámica, mica, papel, poliéster, poliestireno, polietileno, electrolíticos, de tantalio, etc.

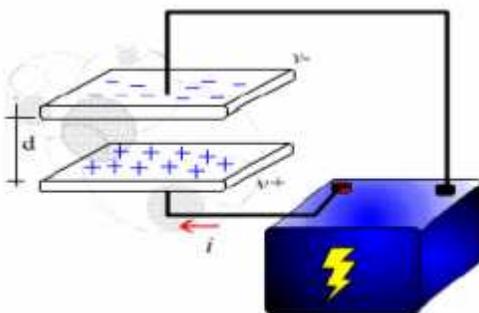


Figura 4.1 Elemento almacenador de energía: El Capacitor

4.2 Cálculo de la capacitancia

Para esta configuración la capacitancia se puede definir como:

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d} \quad \text{ecuación 4.1}$$

donde:

- ϵ es conocida como *permitividad absoluta*, en F/m, y es a su vez igual al producto de:
 ϵ_0 *permitividad del vacío* y la *constante dieléctrica relativa K*, asociada a cada material.
- A es el área transversal del material conductor, en m^2 y
- d la distancia que separa las partes conductoras, en m;

según su definición, se establece que la capacitancia depende de aspectos físicos del elemento.

La batería, en la Figura 4.1, le entrega la energía al capacitor, mediante la aplicación de un voltaje en sus terminales, esta energía se almacena en forma de carga y por lo tanto existe una carga positiva por cada carga negativa, así la carga almacenada es directamente proporcional al voltaje aplicado, dando como resultado la siguiente relación:

$$Q = C V \quad \text{ecuación 4.2}$$

donde **C** es la capacitancia, expresada en coulombs por volts y se conoce como Faradio (F).

4.3 Capacitores en serie y paralelo

Como en las resistencias, existen los mismos arreglos de conexiones para los capacitores.

Asociación de capacitores en serie:

Obsérvese la siguiente Figura 4.2 de un grupo de capacitores conectados en serie y a continuación la formulación de su circuito equivalente.

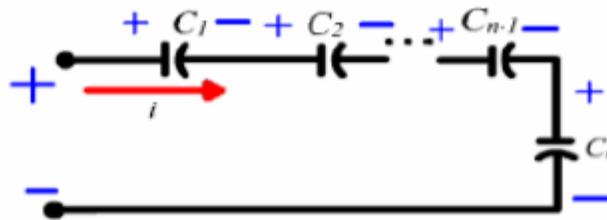


Figura 4.2 Capacitores en serie

Para el caso particular de dos capacitores en serie:

$$C_{eq} = \frac{(C1)(C2)}{C1+C2}$$

Para "n" capacitores en serie

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3} + \dots + \frac{1}{Cn}}$$

ecuaciones 4.3

Asociación de capacitores en paralelo:

Basándose en la siguiente Figura 4.3, capacitores conectados en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es:

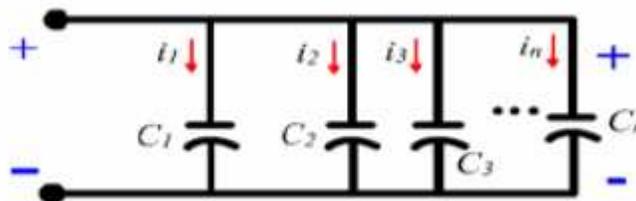


Figura 4.3 Capacitores en paralelo

Para "n" capacitores en serie:

$$C_{eq} = C1 + C2 + C3 \dots Cn$$

ecuación 4.4

CAPÍTULO 5

INDUCTANCIA

5.0 INDUCTANCIA

5.1 Inductancia

Es la característica de un material de almacenar energía, en el campo magnético generado por la variación de corriente que lo atraviesa.

Junto al capacitor, otro elemento que almacena energía es el inductor, básicamente todos los inductores se hacen devanando una longitud del conductor alrededor de un núcleo. El conductor suele ser alambre sólido de cobre revestido con aislamiento esmaltado; y su núcleo está formado, ya sea de material magnético, por ejemplo hierro pulverizado, ó bien de material aislante. Cuando se devana un inductor alrededor de un núcleo aislante, éste funciona sólo como soporte, ya que no tiene propiedades magnéticas. Si se usa un alambre grueso y pesado en la fabricación del inductor, generalmente no se necesita un núcleo, las espiras rígidas del alambre se mantienen por sí solas. Cuando no se usa núcleo magnético, se dice que el inductor tiene núcleo de aire. Ver Figura 5.1.

Los inductores con valores de inductancia fijos que no se pueden cambiar, reciben el nombre de inductores fijos. Los inductores cuya inductancia se puede variar en cierta escala, se llaman inductores variables. Generalmente, los inductores variables están hechos de manera que el núcleo determina el valor de la inductancia.

A estos inductores se les llama también frecuentemente Chokes o bobinas. Estos tres términos significan lo mismo. La propiedad de un inductor para oponerse a un cambio de la corriente que pasa por él, determina su autoinductancia L .

El capacitor e inductor, los cuales son diferentes del resistor en su construcción, funcionamiento y finalidad. A diferencia de las resistencias estos elementos solo presentan sus características, cuando varía el voltaje o la corriente del circuito al que se encuentran conectados, además estos dos elementos almacenan energía en una forma que pueda ser regresada al circuito cuando lo requiera el diseño de este.

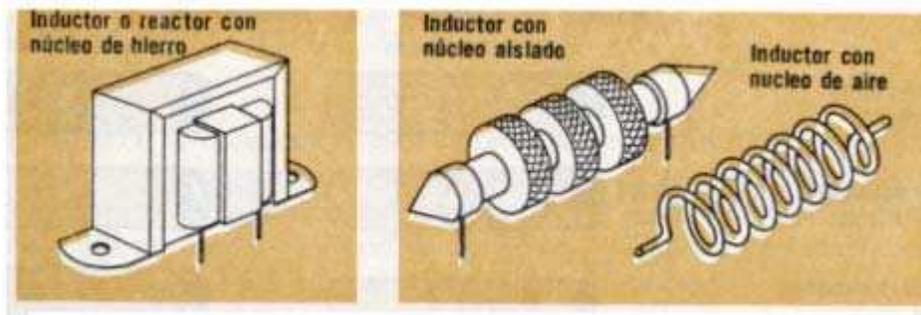


Figura 5.1 Ejemplos de inductores

5.2 Cálculo de la inductancia

Para la Figura 4.3 se puede calcular la inductancia L como:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad (\text{H, Henry}) \quad \text{ecuación 5.1}$$

En donde:

N = número de vueltas.

A = área de la sección transversal.

l = longitud del núcleo.

μ = permeabilidad del núcleo en H/m, depende del material.

5.3 Inductores en serie y paralelo

Asociación de inductores en serie:

Basándose en la siguiente Figura 5.2, inductores conectados en serie (sin acoplamiento magnético entre ellos), la inductancia equivalente L_{eq} es:

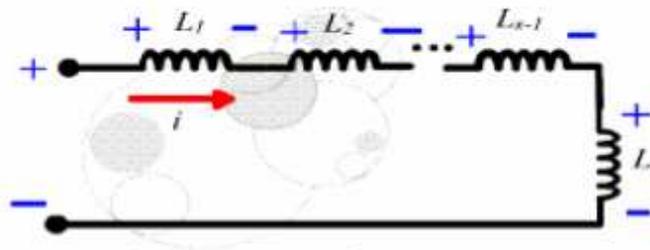


Figura 5.2 Inductores en serie

Para "n" inductores en serie:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 \dots L_n \quad \text{ecuación 5.2}$$

Asociación de inductores en paralelo:

Basándose en la siguiente Figura 5.3, para inductores conectados en paralelo, la inductancia equivalente L_{eq} es:

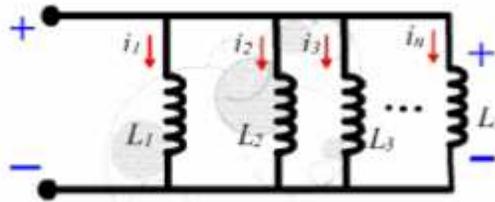


Figura 5.3 Inductores en paralelo

Para el caso particular de dos inductores en paralelo:

$$L_{eq} = \frac{(L_1)(L_2)}{L_1 + L_2}$$

Para "n" inductores en paralelo:

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n}} \quad \text{ecuaciones 5.3}$$

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE DIRECTA

6.0 ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE DIRECTA

6.1 Fuerza electromotriz

Para que exista corriente en un circuito eléctrico se necesita un dispositivo similar a una batería o un generador eléctrico que transforme una clase de energía (química, mecánica, luminosa y demás) en energía eléctrica. Este dispositivo se conoce con el nombre de *fuerza de fuerza electromotriz* o f.e.m. (el termino “fuerza electromotriz” es un nombre inapropiado porque no se refiere a ninguna fuerza que se mide en Newtons. En consecuencia, para evitar confusiones es preferible el uso de la abreviatura f.e.m.). De esta manera, la f.e.m., \mathcal{E} al ser una energía es el trabajo realizado por la fuente de fuerza electromotriz para transportar la unidad de carga eléctrica desde un punto de menor potencial hasta el de mayor potencial

6.2 Diferencia de potencial

La diferencia de potencial en las terminales de una batería (cuando no fluye corriente hacia un circuito externo) se conoce como f.e.m. de la fuente. El símbolo \mathcal{E} se utiliza normalmente para indicar la f.e.m. (que no se debe confundir con la E de campo eléctrico).

Usted habrá notado por experiencia propia que cuando se toma corriente de una batería, el voltaje entre las terminales disminuye cierta cantidad con relación a la f.e.m. que está especificada. Por ejemplo, si enciende un automóvil cuando los faros están conectados, notará que la luz disminuye. Esto sucede porque al arranque se toma una cantidad considerable de corriente, y en consecuencia el voltaje de la batería disminuye. La caída de voltaje aparece porque las reacciones químicas de la batería no pueden proporcionar carga con la rapidez suficiente para mantener el nivel completo de f.e.m. La carga debe fluir (a través del electrolito) entre los electrodos de la batería y siempre existirá cierta dificultad para obtener el flujo completamente libre de la carga. En consecuencia, la batería en sí tiene cierta resistencia, la que se conoce como *resistencia interna* y se designa normalmente como r . Una batería real se puede representar como si fuera una f.e.m. ideal (\mathcal{E}) en serie con el resistor r , como se muestra en la Figura 6.1. Como ésta resistencia r está en el interior de la batería, nunca se podrá separar de ella. Los puntos a y b en el diagrama representan las dos terminales de la batería. La cantidad que se mide es el voltaje en las terminales $V_{ab} = V_a - V_b$. Cuando no se toma corriente de la batería, el voltaje en las terminales es igual a la f.e.m., este hecho está determinado por las reacciones químicas que ocurren en el interior de la batería: $V_{ab} = \mathcal{E}$. Sin embargo, cuando fluye una corriente I que se toma de la batería, existirá una caída interna de voltaje igual a Ir . En consecuencia el voltaje en las terminales (o el voltaje real que entrega la batería) se define como:

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

ecuación 6.1

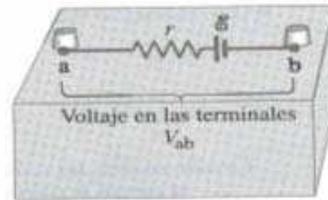


Figura 6.1 Diagrama de una celda eléctrica o batería

6.3 Cálculo de corriente en un circuito cerrado simple

La intensidad de corriente eléctrica en un circuito eléctrico de corriente directa es igual al cociente entre la suma de las fuerzas electromotrices y la resistencia total

$$I = \frac{\sum \mathcal{E}}{R_T} \quad \text{ecuación 6.2}$$

6.4 Leyes de Kirchhoff

No todos los circuitos eléctricos pueden ser reducidos a combinaciones de series y paralelos. Para resolver casos más complejos, donde por ejemplo intervienen redes, son útiles las dos sencillas reglas establecidas por Gustav Kirchhoff. Se dividen en Ley para Corrientes (LCK) y Ley de Voltajes (LVK), a la Ley para Corrientes se le llama también Primera Ley de Kirchhoff y a la de Voltaje, Segunda Ley de Kirchhoff.

Primera Ley de Kirchhoff o Ley para corrientes (LCK)

La suma de las intensidades de corriente que llegan a un nodo de un circuito es igual a la suma de las intensidades que salen de él. Si se consideran positivas, por ejemplo, las intensidades que llegan al nodo y negativas las que salen de él, la Primera Ley establece que la suma algebraica de todas las intensidades de corriente en cualquier punto de un circuito es nula. La expresión matemática será:

$$\sum I_i = 0 \quad \text{ecuación 6.3}$$

Segunda Ley de Kirchhoff o Ley para voltajes (LVK)

En un circuito cerrado o malla, la suma de las elevaciones de potencial ó voltaje es igual a la suma de las caídas de voltaje a lo largo de él. Dicho con otras palabras, la suma algebraica de las diferencias de potencial en todo circuito cerrado es cero. Esto es una consecuencia del principio de conservación de la energía. Una malla es un circuito cerrado elemental. O sea:

$$\sum fem - \sum R_i \cdot I_i = 0 \quad \text{ecuación 6.4}$$

6.5 Divisores de potencial y corriente

Principio del divisor de potencial

Con frecuencia se desea conocer el valor del voltaje en las terminales de un resistor individual en un circuito en serie, ver Figura 6.2, el voltaje V_n en las terminales de cualquier resistencia R_n es igual al producto del voltaje aplicado V_{tot} por R_n , dividido por la suma de las resistencias R_{eq} , en el circuito en serie:

$$V_n = V_{tot} \frac{R_n}{R_{eq}} \quad \text{ecuación 6.5}$$

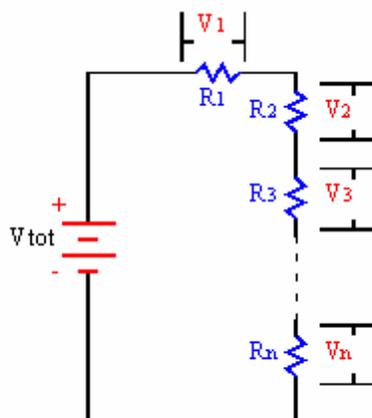


Figura 6.2 Principio del divisor de potencial

A partir de la ecuación 6.5 anterior, se puede ver que V_n es directamente proporcional a R_n . El principio del divisor de voltaje se aplica sólo a un circuito, como el circuito en serie, donde la corriente es la misma en cada elemento.

Ejemplo 6.1:

Para alimentar un relevador, de 6 ohms de resistencia, disponemos de una fuente de 24 volts, sin embargo el manual del fabricante recomienda un voltaje de alimentación no mayor de 15 volts; calcular el valor de la resistencia que se debe conectar al circuito para que el voltaje en el relevador sea de 15 volts.

Datos:

$V_{total} = 24 \text{ V}$

$R_{relevador} (R_a) = 6 \Omega$

$V_{relevador} (V_a) = 15 \text{ V}$

$R_b = ?$

$V_b = ?$

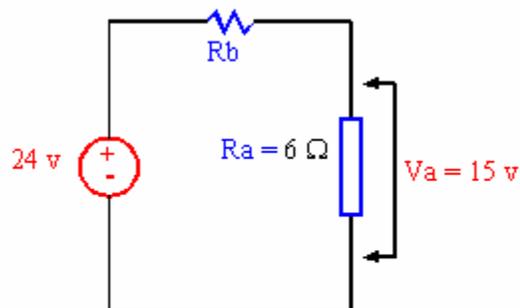


Figura 6.3 Circuito del Ejemplo 6.1 para el divisor de voltaje

Solución:

Como necesitamos reducir el voltaje en el relevador de 24 a 15 V, debemos “dividir” el voltaje, por tanto, necesitamos conectar la resistencia en serie y aplicar el principio del divisor de voltaje.

$$V_b = V_{tot} \left(\frac{R_b}{R_b + R_a} \right)$$

Para obtener el valor de V_b , simplemente restamos:

$$V_b = V_{tot} - V_a = 24 - 15 = 9 \text{ V}$$

Sustituyendo datos en formula:

$$9 = 24 \left(\frac{R_b}{R_b + 6} \right)$$

$$9 = \frac{24R_b}{R_b + 6}$$

De aquí, despejamos R_b

$$9 (R_b + 6) = 24 R_b$$

$$9 R_b + 54 = 24 R_b$$

$$54 = 24 R_b - 9 R_b$$

$$54 = 15 R_b$$

$$R_b = \frac{54}{15} = 3.6 \Omega$$

La resistencia a conectar en serie con el relevador debe ser de 3.6Ω .

Principio del divisor de corriente

En un circuito que contenga n ramas en paralelo, Figura 6.4, con frecuencia se desea conocer, el valor de la corriente en una rama dada. La corriente I_n en la rama R_n es igual al producto de la corriente aplicada I_{tot} por la resistencia equivalente R_{eq} del circuito en paralelo, dividida por R_n .

$$I_n = I_{tot} \cdot \frac{R_{eq}}{R_n} \quad \text{ecuación 6.6}$$

El principio del divisor de corriente se aplica sólo a un circuito, como el circuito en paralelo, donde el voltaje en cada elemento es el mismo.

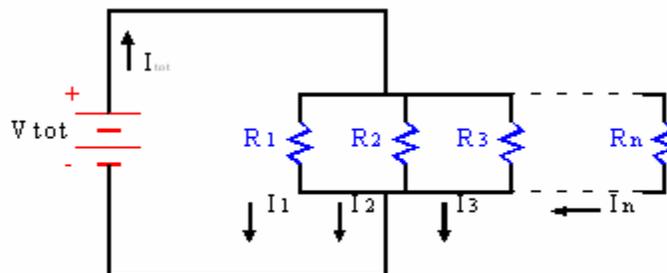


Figura 6.4 Principio del divisor de corriente

En donde hay dos resistencias R_a y R_b en paralelo, la corriente I_a en R_a es:

$$I_a = I_{tot} \frac{R_b}{R_a + R_b} \quad \text{ecuación 6.7}$$

La corriente I_b en R_b es:

$$I_b = I_{tot} \frac{R_a}{R_a + R_b} \quad \text{ecuación 6.8}$$

La corriente de rama es inversamente proporcional a la resistencia de la rama. La rama que contiene la resistencia mayor recibe la corriente menor y viceversa.

Ejemplo 6.2:

Para el circuito del relevador del Ejemplo 6.1 anterior, los datos técnicos del relevador nos indican que él mismo se activará con una corriente de 0.8 amp; por tanto, debemos calcular la corriente que circula por él, y en caso de que la misma no esté acorde a los datos técnicos, calcular el valor de la resistencia que se debe añadir al circuito para obtener la corriente adecuada al relevador.

Datos:

$$I_{\text{relevador}} (I_a) = 0.8 \text{ A}$$

$$R_{\text{relevador}} (R_a) = 6 \Omega$$

$$V_{\text{relevador}} (V_a) = 15 \text{ V}$$

Solución:

Sabemos que el relevador se está alimentando con 15 V, y tiene una resistencia de 6 Ω, entonces de acuerdo a la Ley de Ohm, por él circula una corriente de:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{15}{6} = 2.5A$$

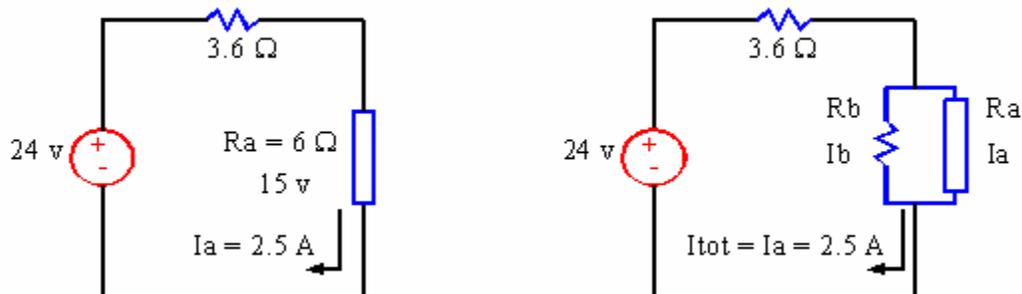


Figura 6.5 Circuitos del Ejemplo 6.2 para el divisor de corriente

Esta corriente es mayor de la que recomienda al manual (0.8A), entonces para reducirla, necesitamos conectar una resistencia en paralelo al relevador para que la $I = 2.5$ se “divida” y para calcular el valor de la resistencia a conectar, aplicamos el principio del divisor de corriente.

$$I_b = I_{tot} \left(\frac{R_a}{R_b + R_a} \right)$$

Para saber el valor de la corriente en la resistencia a conectar solo hacemos:

$$I_b = I_{tot} - I_a = 2.5 - 0.8 = 1.7 A$$

Ahora sustituimos los datos conocidos en la fórmula:

$$1.7 = 2.5 \left(\frac{6}{R_b + 6} \right)$$

$$1.7 = \frac{15}{R_b + 6}$$

De aquí sólo queda despejar R_b y reducir la expresión para obtener el resultado:

$$1.7 (R_b + 6) = 15$$

$$1.7 R_b + 10.2 = 15$$

$$1.7 R_b = 15 - 10.2$$

$$1.7 R_b = 4.8$$

$$R_b = \frac{4.8}{1.7} = 2.82 \Omega$$

Entonces, para que por el relevador circule de 0.8 A, necesitamos adicionar al circuito, una resistencia de 2.82 Ω en paralelo con el relevador.

6.6 Conversiones delta-estrella y estrella-delta

En relación a la Figura 6.6, las formulas de conversión son:

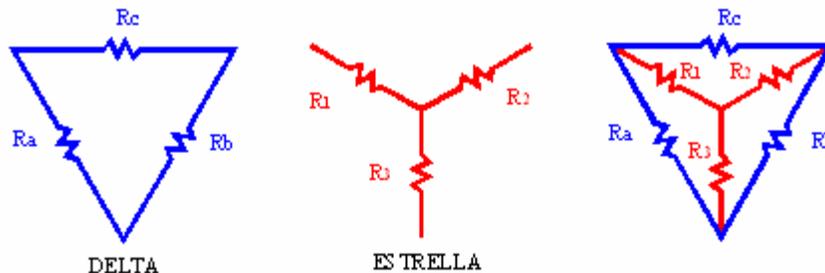


Figura 6.6 Conversión delta-estrella y estrella

Delta a Estrella	Estrella a Delta	
$R1 = \frac{Ra \cdot Rc}{Ra + Rb + Rc}$	$Ra = \frac{R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3}{R2}$	ecuaciones 6.9
$R2 = \frac{Rb \cdot Rc}{Ra + Rb + Rc}$	$Rb = \frac{R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3}{R1}$	
$R3 = \frac{Rb \cdot Ra}{Ra + Rb + Rc}$	$Rc = \frac{R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3}{R3}$	

6.7 Análisis de mallas

Una malla es una trayectoria cerrada, sin otras trayectorias cerradas en su interior. Un lazo es también una trayectoria cerrada, pero puede tener otras en su interior. Por consiguiente, todas las mallas son lazos; pero no todos los lazos son mallas. Si el diagrama esquemático de un circuito está trazado limpiamente, se podrá ver el circuito como un “marco de ventana”, con las mallas como “ventanas”.

Para resolver un circuito, utilizando el análisis de mallas:

1. Supóngase corrientes de malla en cualquier dirección.
2. Insértense flechas de sentido del voltaje en cada elemento, debido a la corriente de malla. Los sentidos de los voltajes se fijan en las fuentes de voltaje. Si un elemento tiene más de una flecha de dirección, debido a dos corrientes de malla, marcarlas por separado dentro de las mallas respectivas.
3. Escríbase la LKV en torno a cada malla, en cualquier dirección. Es conveniente utilizar la misma dirección que la de la corriente de malla.
4. Vuélvase a escribir las ecuaciones resultantes en forma de bloques.

Ejemplo 6.3:

Resuelva el siguiente circuito aplicando el análisis de mallas.

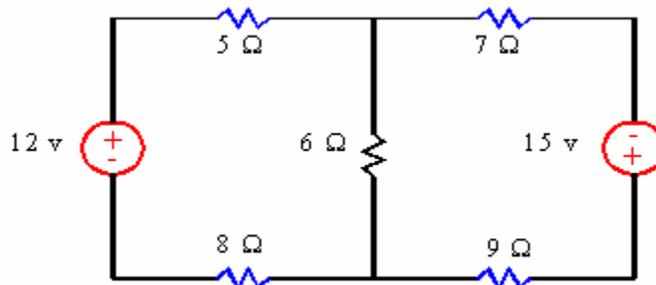


Figura 6.7 Circuito del Ejemplo 6.3 para análisis de mallas

Estableciendo las ecuaciones de mallas tendremos:

MALLA I

$$12 = 5I_1 + 6I_1 + 8I_1 - 6I_2$$

$$12 = 19I_1 - 6I_2$$

$$19I_1 - 6I_2 = 12$$

ecuación 1a

MALLA II

$$15 = 9I_2 + 6I_2 + 7I_2 - 6I_1$$

$$15 = 22I_2 - 6I_1$$

$$-6I_1 + 22I_2 = 15$$

ecuación 2a

Ahora sólo se deben resolver simultáneamente las ecuaciones 1a y 2a, por cualquier método conocido; en este ejemplo usaremos el método de Cramer (solución por determinantes).

$$A = \begin{vmatrix} 19 & -6 \\ -6 & 22 \end{vmatrix} = 418 - 36 = 382$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ 15 & 22 \end{vmatrix} = 264 + 90 = 354$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 19 & 12 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} = 285 + 72 = 357$$

Donde los resultados obtenidos de:

$$I_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{354}{382} = 0.9267 \text{ amp.}$$

$$I_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{357}{382} = 0.9345 \text{ amp.}$$

6.8 Análisis nodal

Otro método de análisis de circuitos es el análisis nodal. Este método es útil para encontrar voltajes desconocidos, cuando se conocen los valores de las corrientes nodales de un circuito dado. Para resolver un circuito mediante el análisis nodal:

1. Designense todos los nodos mediante una letra o número.
2. Escójanse uno de los nodos como referencia (cero volts a tierra).
3. Supónganse que todos los otros nodos están a un potencial más alto que el nodo de referencia.
4. Diríjense las corrientes a través de cada elemento, saliendo del nodo que se analiza hacia el de referencia.

Supónganse corrientes entre nodos, ninguno de los cuales es el de referencia, en una dirección dada. El sentido del voltaje se acomoda a la dirección supuesta de la corriente.

5. Aplíquese la LCK a cada nodo, con excepción al de referencia.

La mayoría de las veces para simplificar la determinación de las ecuaciones por este método, se prefiere convertir los valores de las resistencias en conductancias.

Ejemplo 6.4:

Resuelva el siguiente circuito aplicando el análisis de nodos adecuadamente.

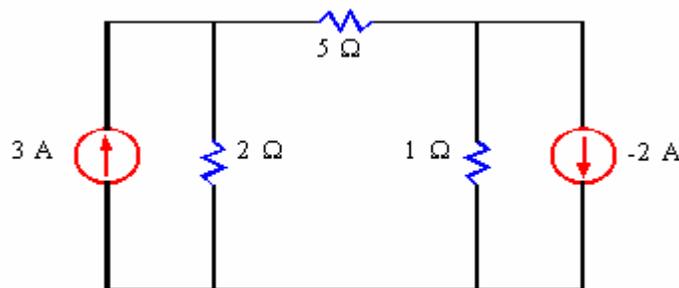


Figura 6.8 Circuito del Ejemplo 6.4 para análisis nodal

Estableciendo las ecuaciones de nodos tendremos:

NODO 1

$$3 = \frac{V_1}{2} + \frac{V_1}{5} - \frac{V_2}{5}$$

ecuación 6c

$$3 = 0.5V_1 + 0.2V_1 - 0.2V_2$$

$$3 = 0.7V_1 - 0.2V_2$$

$$0.7V_1 - 0.2V_2 = 3$$

NODO 2

$$-(-2) = \frac{V_2}{1} + \frac{V_2}{5} - \frac{V_1}{5} \quad \text{ecuación 6d}$$

$$2 = V_2 + 0.2V_2 - 0.2V_1$$

$$2 = 1.2V_2 - 0.2V_1$$

$$-0.2V_1 + 1.2V_2 = 2$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 6c y 6d, por el método de sustitución.

Despejando V_2 de la ecuación 6d:

$$V_2 = \frac{2 + 0.2V_1}{1.2}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 6c:

$$0.7V_1 - 0.2 \left(\frac{2 + 0.2V_1}{1.2} \right) = 3$$

$$0.7V_1 - 0.333 - 0.0333V_1 = 3$$

$$0.666V_1 = 3 + 0.333$$

$$V_1 = \frac{3.333}{0.6666} = 5 \text{Volts}$$

Ahora sustituyendo este valor de V_1 en V_2 despejando:

$$V_2 = \frac{2 + 0.2(5)}{1.2} = 2.5 \text{Volts}$$

6.9 Cálculo de potencia en corriente directa

La potencia **P** se define como la rapidez de cambio de energía o trabajo eléctrico con respecto al tiempo, y con relación al voltaje y a la corriente, la potencia es igual a su producto.

$$P = VI \quad \text{ecuación 6.10}$$

Si en la ecuación anterior, sustituimos la ecuación para la corriente de la Ley de Ohm $I=V/R$, obtendremos la potencia disipada en una resistencia R en términos del voltaje V:

$$P = VI = V \left(\frac{V}{R} \right) = \frac{V^2}{R} \quad \text{ecuación 6.11}$$

De forma similar, en función de la corriente:

$$P = VI = (IR) I = I^2R \quad \text{ecuación 6.12}$$

CAPÍTULO
7

NÚMEROS COMPLEJOS Y DIAGRAMAS FASORIALES

7.0 NÚMEROS COMPLEJOS Y DIAGRAMAS FASORIALES

7.1 Números complejos

Como sabemos existe un conjunto de números llamados números reales, que incluyen a los números racionales e irracionales, en los que se pueden representar sobre una recta a la que llamamos eje real.

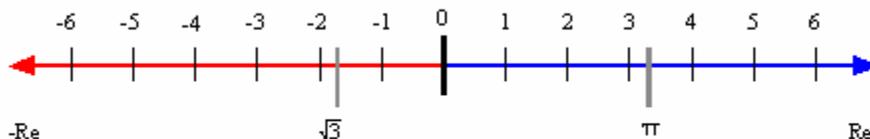


Figura 7.1 Eje real

La suma, resta, multiplicación y división de números reales es otro número real. La raíz cuadrada de un número real *positivo* es también otro número real, pero si es *negativo*, su raíz cuadrada no es un número real y no corresponde a ningún punto del eje real. La raíz cuadrada de un número real *negativo* es un número *imaginario*, por ejemplo, son números imaginarios $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-8}$, etc.

Si hacemos que $j = \sqrt{-1}$, entonces $j^2 = -1$ ahora tenemos una *unidad imaginaria* con la que podemos manejar los números anteriores como si fueran positivos, y tendríamos:

$$\begin{aligned}\sqrt{-2} &= j\sqrt{2} \\ \sqrt{-4} &= j\sqrt{4} = j2 \\ \sqrt{-36} &= j\sqrt{36} = j6\end{aligned}$$

Si la unidad imaginaria la elevamos a diferentes potencias obtenemos:

$$\begin{aligned}j^2 &= (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ j^3 &= j^2 j = (\sqrt{-1})^2 j = -j \\ j^4 &= (j^2)^2 = (\sqrt{-1})^2 = 1 \quad \dots \text{ y así sucesivamente.}\end{aligned}$$

El conjunto de los números imaginarios, se puede representar en otra recta, que se llama eje imaginario.

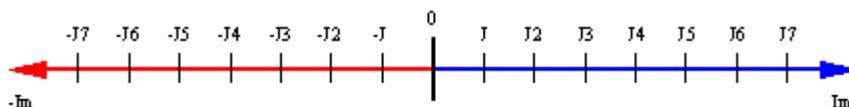


Figura 7.2 Eje imaginario

Un número complejo z se expresa generalmente en la forma $x + jy$ donde “ x ” y “ y ” son números reales y “ j ” es la llamada unidad imaginaria, los números reales “ x ” y “ y ” se conocen, respectivamente, como las partes real e imaginaria de:

$$z = x + jy$$

Los números complejos $Z = x + jy$ y $\check{Z} = x - jy$ se conocen como conjugados complejos el uno del otro.

Si la parte real es nula ($x=0$), el número complejo se reduce a un número imaginario puro; de la misma forma, si la parte imaginaria es nula ($y=0$), el número complejo se reduce a un número real.

Si trazamos el eje imaginario perpendicular al eje real, como en la Figura 7.3, siendo 0 el punto de intersección, obtenemos el plano complejo donde podemos representar los números complejos; por ejemplo:

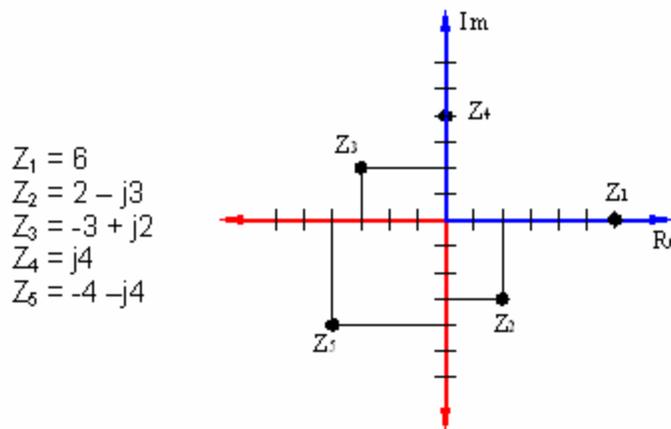


Figura 7.3 Localización de números complejos

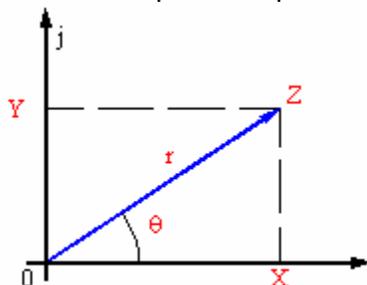
Si observamos la Figura 7.4, tenemos representado un número complejo; en donde la distancia desde el origen hasta el punto donde se localiza z , se llama módulo de z y se calcula como:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ecuación 7.1}$$

Y el ángulo formado entre el eje real y el módulo r , se llama argumento de z , y se obtiene como sigue:

$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{ecuación 7.2}$$

En la Figura 7.4 el punto z cuyas coordenadas son (x, y) , representa un número complejo $z = x + jy$, el punto z también se puede expresar en coordenadas polares (r, θ) puesto que:



$$x = r \cos \theta \quad \text{ecuación 7.3}$$

$$y = r \text{ sen } \theta \quad \text{ecuación 7.4}$$

Figura 7.4 Representación polar de un número complejo Z

Por lo tanto $z = x + jy = r (\cos \theta + j \sen \theta)$, siendo esta la forma polar del número complejo.

En teoría de circuitos es muy común emplear la forma polar o de Steinmetz de un número complejo, y se suele escribir como:

$$z = r \angle \theta^\circ$$

En donde θ se mide en grados o radianes.

Así entonces tenemos dos formas principales para representar un número complejo; el empleo de una o de otra depende, básicamente, de la operación que se trate de efectuar.

Forma rectangular ó binómica:

$$z = x + jy \quad \text{ecuación 7.5}$$

Forma polar:

$$z = r \angle \theta^\circ \quad \text{ecuación 7.6}$$

La forma binómica facilita la suma ó resta de números complejos; mientras que la forma polar facilita la multiplicación y división de los mismos.

Ejemplo 7.1:

Expresar $50 \angle 53.1^\circ$ en la forma binómica (rectangular), $x + jy$.

De acuerdo a la Figura 7.4 se cumple que:

$$x = r \cos \theta \quad \text{donde } r = 50 \text{ y } \theta = 53.1^\circ$$

$$y = r \sen \theta$$

$$x = 50 (\cos 53.1^\circ) = 50 (0.6) = 30.02$$

$$x = 30.02$$

$$y = 50 (\sen 53.1^\circ) = 50 (0.7996) = 39.98$$

$$y = 39.98$$

Por lo tanto el resultado es:

$$z = 50 \angle 53.1^\circ = 30.02 + j39.98$$

Ejemplo 7.2:

Expresar $4 + j3$ en forma polar, $r \angle \phi^\circ$.

En este ejemplo, de acuerdo de acuerdo a la Figura 7.4, se cumple que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Entonces, realizamos las operaciones y resulta:

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ$$

$$z = 4 + j3 = 5 \angle 36.87^\circ$$

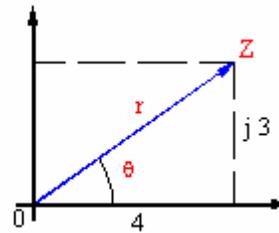


Figura 7.5 Grafica del Ejemplo 7.2

7.2 Álgebra de números complejos

Suma de números complejos

Para sumar dos números complejos, primero se suman sus partes reales (x), y después se suman sus partes imaginarias (y) como se indica:

$$(a+jb) + (c+jd) = (a+c) + j(b+d)$$

Por ejemplo:

Tenemos: $z_1 = 5 - j2$ y $z_2 = -3 - j8$

Entonces: $z_1 + z_2 = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$

Resta de números complejos

Para restar dos números complejos, primero se restan sus partes reales (x), y después se restan sus partes imaginarias (y) como se indica:

$$(a+jb) - (c+jd) = (a-c) + j(b-d)$$

Por ejemplo:

Tenemos: $z_1 = 5 - j2$ y $z_2 = -3 - j8$

Entonces: $z_2 - z_1 = (-3 - 5) + j(-8 + 2) = -8 - j6$

Multiplicación de números complejos

El producto de dos números complejos que estén representados en forma polar, se obtiene multiplicando sus módulos (r), y sumando sus argumentos (ángulos θ).

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 \cdot r_2 (\angle \theta_1 + \angle \theta_2)$$

Por ejemplo:

Tenemos: $z_1 = 2 \angle 30^\circ$ y $z_2 = 5 \angle -45^\circ$

Entonces: $z_2 \cdot z_1 = (2 \cdot 5) \angle (30^\circ - 45^\circ) = 10 \angle -15^\circ$

Para el caso de que los números complejos estén en forma binómica (rectangular), la multiplicación

se realiza como una operación con polinomios.

División de números complejos

El cociente de dos números complejos, escritos en forma polar, se obtiene dividiendo sus módulos (r), pero ahora sus argumentos (ángulos) se restan, al del numerador se le resta el del denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Por ejemplo:

Tenemos: $z_1 = 8 \angle -30^\circ$ y $z_2 = 2 \angle -60^\circ$

Entonces: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 \angle -30^\circ}{2 \angle -60^\circ} = \frac{8}{2} \angle (-30^\circ - (-60^\circ)) = 4 \angle 30^\circ$

Ejemplo 7.3:

Realice las operaciones indicadas con los números complejos que se definen a continuación.

Si tenemos los siguientes números complejos:

$z_1 = -4 + j2$	$z_1 - z_4$
$z_2 = 3 \angle 30^\circ$	$\frac{z_3}{z_2}$
$z_3 = 6 \angle 45^\circ$	$z_2 \cdot z_1$
$z_4 = 5 - j4$	$z_4 + z_3$

Para la operación $z_1 - z_4$, directamente realizamos la resta, puesto que los dos números están escritos en su forma binómica rectangular.

$$\begin{aligned} z_1 - z_4 &= (-4 + j2) - (5 - j4) \\ z_1 - z_4 &= -4 + j2 + 5 + j4 \\ z_1 - z_4 &= (-4 - 5) + j(2 + 4) \\ z_1 - z_4 &= -9 + j6 \end{aligned}$$

En la división de z_3/z_2 , observamos que los dos números están escritos en su forma polar, lo que facilita la operación.

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{6 \angle 45^\circ}{3 \angle 30^\circ} = \frac{6}{3} \angle (45^\circ - 30^\circ) = 2 \angle 15^\circ$$

Para realizar la multiplicación de $z_2 \cdot z_1$, habrá que convertir el valor de z_1 de su forma rectangular a su forma polar, para facilitar la operación.

$$\begin{aligned} z_2 \cdot z_1 &= (3 \angle 30^\circ)(-4 + j2) \\ z_2 \cdot z_1 &= (3 \angle 30^\circ)(4.472 \angle 153.43^\circ) \\ z_2 \cdot z_1 &= (3 \cdot 4.472) \angle (30^\circ + 153.43^\circ) \\ z_2 \cdot z_1 &= 13.416 \angle 183.43^\circ \end{aligned}$$

La última operación indicada, $z_4 + z_3$, implica también cambiar la forma polar de z_3 a su forma binómica.

$$z_4 + z_3 = (5 - j4) + (6 \angle 45^\circ)$$

$$z_4 + z_3 = (5 - j4) + (4.2426 + j4.2426)$$

$$z_4 + z_3 = (5 + 4.2426) + (-j4 + j4.2426)$$

$$z_4 + z_3 = 9.2426 + j0.2426$$

Para referencia y revisión de varias formas de representar un punto z en el plano complejo representado en la Figura 7.4 se tiene la siguiente tabla:

RECTANGULAR	COMPLEJA	EXPONENCIAL	POLAR	FASORIAL
$X + jY$	$= Z (\cos \theta + j \sen \theta)$	$= Z e^{j\theta}$	$= Z \angle \theta^\circ$	$= Z$
$X - jY$	$= Z (\cos \theta - j \sen \theta)$	$= Z e^{-j\theta}$	$= Z \angle -\theta^\circ$	$= \check{Z}$

7.3 Notación fasorial

Una corriente ó un voltaje senoidal a *una frecuencia dada*, se caracterizan por solo dos parámetros, una amplitud y un ángulo de fase. En cualquier circuito lineal que opere en estado permanente y con una frecuencia única, toda corriente o voltaje puede caracterizarse completamente, conociendo su amplitud y ángulo de fase.

Así un voltaje de fuente representado en el dominio del tiempo como:

$$v(t) = V_m \cos \omega t \quad \text{ecuación 7.7}$$

se puede expresar en forma polar como:

$$V_m \angle 0^\circ \quad \text{ecuación 7.8}$$

y la respuesta de corriente

$$i(t) = I_m \cos (\omega t + \phi) \quad \text{ecuación 7.9}$$

se convierte en:

$$I_m \angle \phi^\circ \quad \text{ecuación 7.10}$$

Esta representación compleja abreviada se llama *fasor*.

Consideremos una función $f(t) = r e^{j\omega t}$ que representa un número complejo que depende del tiempo t , sin embargo su módulo es constante e igual a r . Si representamos gráficamente los instantes $t = 0$, $t = \pi/4\omega$ y $t = \pi/2\omega$, se pone de manifiesto la naturaleza de la función, como se ve en la Figura 7.6.

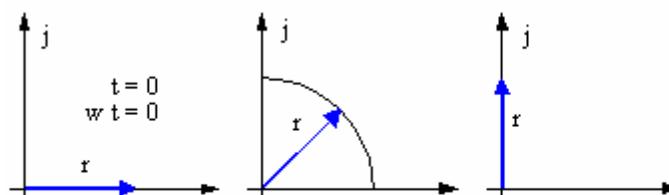


Figura 7.6 Función $r e^{j\omega t}$

Para ω (velocidad angular) constante, el segmento gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con velocidad constante.

Lo anterior es una explicación muy breve de la notación fasorial en forma básica; el completo desarrollo de esta notación requiere de un trabajo mayor con cantidades complejas en forma exponencial, sin embargo el conocimiento básico permite trabajar apropiadamente las variables que se presentan en los sistemas eléctricos actuales.

CAPÍTULO
8

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA

8.0 ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA

8.1 Corriente alterna

Corriente alterna es aquella en la que los portadores de carga circulan alternativamente en uno y otro sentido. La mayor parte de la corriente eléctrica que se produce a nivel mundial es la corriente alterna. El que se prefiera la corriente alterna a la directa se debe a que:

- a) Es más fácil de producirla
- b) Resulta más barato producirla
- c) Tiene mayor número de aplicaciones que la corriente directa

En los circuitos de corriente alterna (c.a.) los voltajes y las corrientes varían con el tiempo; éstos pueden variar en forma senoidal, Figura 8.1. Es decir, en estos circuitos el voltaje y la corriente en cada instante están dados por:

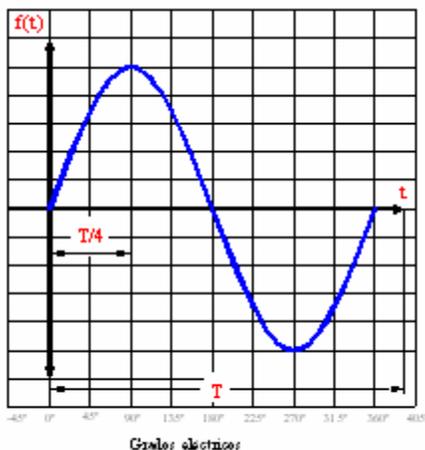


Figura 8.1 Forma de la onda senoidal en c.a.

$$v = v(t) = V_m \text{ sen}(\omega t \pm \varphi)$$

$$i = i(t) = I_m \text{ sen}(\omega t \pm \varphi)$$

ecuaciones 8.1

En donde:

- $v(t)$ = voltaje en el instante t
- $i(t)$ = corriente en el instante t
- V_m = amplitud máxima o pico del voltaje
- I_m = amplitud máxima o pico de la corriente

- ω = velocidad angular
- ϕ = ángulo de fase medio en radianes o grados. El ángulo especifica el desplazamiento de la forma de onda a la izquierda o derecha del origen

La velocidad angular se relaciona con la *frecuencia* por medio de:

$$\omega = 2 \pi f \quad \text{ó bien} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ecuación 8.2}$$

Existen otros parámetros de la corriente alterna que no se ubican directamente en la forma de onda pero son muy importantes: ciclo, período, frecuencia.

Ciclo, toda forma de onda periódica que completa una trayectoria, es decir comienza en un punto de la forma de onda y termina el mismo punto para iniciar otra.

Período determina el intervalo de tiempo que tarda en completarse un ciclo (en segundos), se denota por la letra T.

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{ó bien} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ecuación 8.3}$$

Frecuencia, al número de ciclos generados por segundo, se expresa en Hertz.

8.2 Magnitudes de la corriente alterna

Valor máximo de voltaje y de corriente.

Es el máximo valor que alcanza la forma de onda ya sea positiva o negativa, desde el eje de referencia hasta el punto más alto de la cresta o el punto más bajo del valle. Se denota por la letra V_m si es voltaje o I_m si corriente. Se indica la siguiente Figura 8.2.

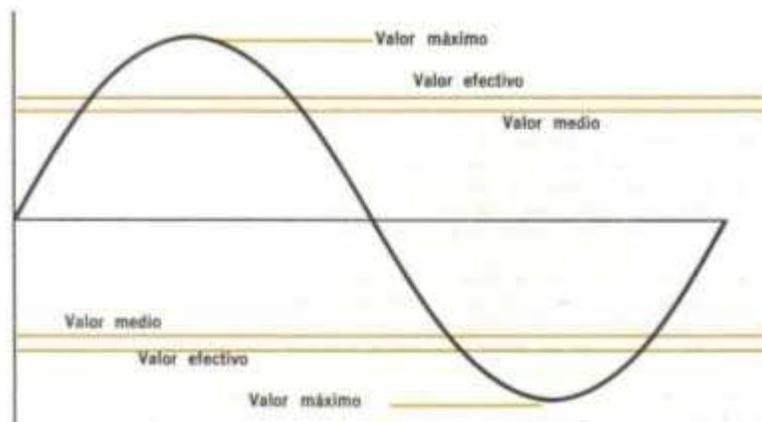


Figura 8.2 Magnitudes de la corriente alterna

Valor pico- pico de voltaje y de corriente.

Es el valor que va desde el máximo positivo hasta el máximo negativo es decir desde la punta más alta de una cresta hasta la parte más baja de un valle. Se identifica por la letra V_{pp} si es voltaje o I_{pp} si es la corriente. Con relación al valor máximo se tienen las siguientes equivalencias:

$$V_{pp} = 2 V_m \quad \text{ó} \quad I_{pp} = 2 I_m \quad \text{ecuación 8.4}$$

Valor eficaz o valor rms de voltaje y de corriente

El valor eficaz de el voltaje o de la corriente es el valor más importante de la corriente alterna, se puede definir como: Al circular una corriente $i(t)$ por un elemento resistivo puro R , éste disipa una cantidad de energía que es igual a la que se produce si por dicho elemento circula una corriente constante (corriente directa) I_{cd} . En estas condiciones, se dice que $i(t)$ tiene un valor eficaz I_{rms} equivalente a la corriente constante I_{cd} . Lo mismo se diría del voltaje eficaz V_{rms} . Por tanto, el valor efectivo o valor medio cuadrático (rms) de una forma de onda periódica senoidal es, en relación con el valor máximo:

$$V_{rms} = 0.7071 V_m = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad I_{rms} = 0.7071 I_m = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{ecuación 8.5}$$

Valor promedio de voltaje y de corriente

El valor promedio de voltaje y de corriente se puede determinar como el promedio de todos los valores instantáneos en un semiciclo de la forma de onda. Puesto que los semiciclos positivos y negativos de una onda senoidal son iguales, es igual a cero. Se denota por las letras V_{prom} si es voltaje o I_{prom} si es corriente. En relación con los otros valores máximos de voltaje o de corriente se tienen las siguientes igualdades:

$$V_{prom} = 0.637 V_m \quad \text{ó} \quad I_{prom} = 0.637 I_m \quad \text{ecuación 8.6}$$

Valor instantáneo de voltaje y de corriente

El valor instantáneo de voltaje y de corriente es aquel que tiene la señal senoidal en cualquier instante, se puede considerar que la forma de onda esta compuesta por infinitos valores instantáneos que se presentan sucesivamente, se denotan por la letra v si es voltaje o la letra i si es corriente, las ecuaciones representativas de estos parámetros son los siguientes:

$$v(t) = V_m \text{ sen } (\omega t \pm \varphi) \quad \text{ó} \quad i(t) = I_m \text{ sen } (\omega t \pm \varphi) \quad \text{ecuación 8.7}$$

8.3 Relación de corriente y potencial de los elementos puros

En las tablas que se dan a continuación aparecen las tensiones en los bornes y las corrientes por los tres elementos R , L y C puros, para el caso de que se aplique voltaje o corriente de forma senoidal.

Voltaje en bornes de un elemento puro si la corriente aplicada es senoidal de la forma:	Corriente en los elementos puros si el voltaje aplicado es senoidal de la forma:	ecuaciones 8.8
$i = I_m \text{ sen } \omega t$	$v = V_m \text{ sen } \omega t$	
Resistencia $V_r = R I_m \text{ sen } \omega t$	Resistencia $I_R = \frac{V_m}{R} \text{ sen } \omega t$	
Inductancia $V_l = \omega L I_m \text{ cos } \omega t$	Inductancia $I_L = \frac{V_m}{\omega L} (-\text{cos } \omega t)$	
Capacitancia $V_c = \frac{I_m}{\omega C} (-\text{cos } \omega t)$	Capacitancia $I_C = \omega C V_m \text{ cos } \omega t$	

8.3.1 Resistencia pura

En la Figura 8.3 se conecta una fuente de voltaje de c.a., $v = V_m \text{ sen } \omega t$, a un elemento resistivo R , por la Ley de Ohm:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m}{R} \text{ sen } \omega t = I_m \text{ sen } \omega t$$

En donde:

$$I_m = \frac{V_m}{R}$$

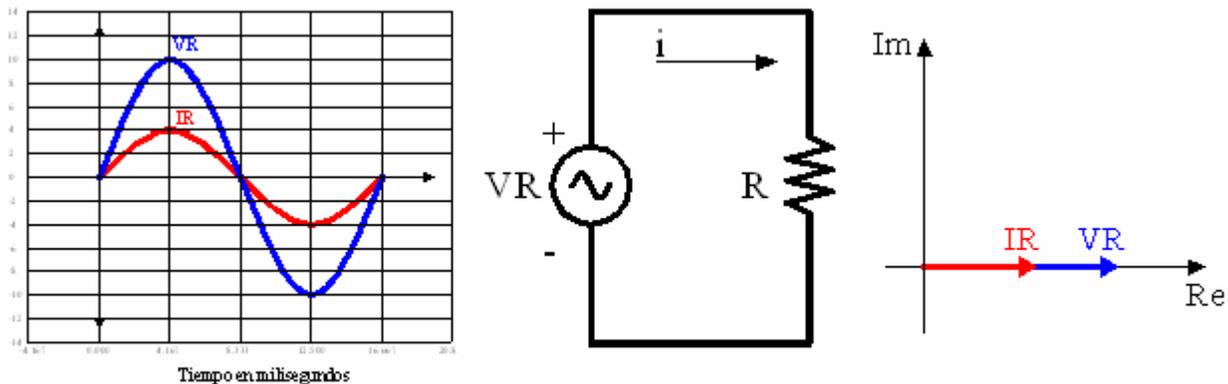


Figura 8.3 Corriente y voltaje en un circuito resistivo puro

Al graficar v e i en función del tiempo se puede ver que el voltaje y la corriente en una resistencia pura están en fase, como en la Figura 8.3.

La impedancia es:

$$Z = \frac{V}{I} \quad \text{ecuación 8.9}$$

En un circuito puramente resistivo, la impedancia es real e igual a R .

8.3.2 Capacitancia pura

En la Figura 8.4, el voltaje entre las terminales de una capacitancia pura C es igual a $v = V_m \text{ sen } \omega t$, y la corriente es:

$$i = V_m \omega C \cos \omega t$$

la impedancia esta definida como:

$$Z = R - j X_c$$

pero, la consideración en un circuito puramente capacitivo es que el valor de la resistencia sea cero, se tiene:

$$Z = -j X_c$$

y

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad j = 90^\circ \quad \text{ecuación 8.10}$$

por lo tanto; de la Ley de Ohm

$$I = \frac{V}{Z}$$

sustituyendo el valor de $j = 90^\circ$

$$i = \frac{V_m \text{ sen } \omega t}{\frac{1}{\omega C} \cdot -90^\circ}$$

en donde $I_m = V_m \omega C$ y $\cos \omega t = \text{sen } (\omega t + 90^\circ)$. Al graficar v e i en función del tiempo, se puede ver que la corriente tiene un adelanto sobre el voltaje de 90° (ó que el voltaje tiene un retraso sobre la corriente de 90°), en una capacitancia pura.

$$i = V_m \omega C \text{ sen } [\omega t - (-90^\circ)]$$

$$i = I_m \cos \omega t \quad \text{ecuación 8.11}$$

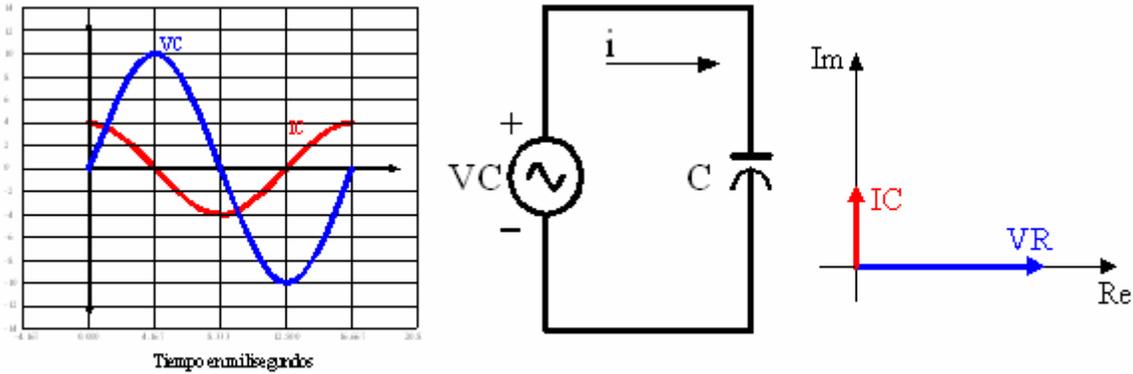


Figura 8.4 Corriente y voltaje en un elemento capacitivo

8.3.3 Inductancia pura

En la Figura 8.5, la corriente que fluye en una inductancia pura L es igual a la forma $i = I_m \text{ sen } \omega t$, y el voltaje es:

$$v = I_m \omega L \cos \omega t$$

la impedancia esta definida como:

$$Z = R + j X_L$$

pero, la consideración en un circuito puramente inductivo es que el valor de la resistencia sea cero, se tiene:

$$Z = j X_L$$

y

$$X_L = \omega L \quad j = 90^\circ$$

ecuación 8.12

por lo tanto; de la Ley de Ohm

$$V = I Z$$

$$v = (I_m \text{ sen } \omega t) (j \omega L)$$

sustituyendo el valor de $j = 90^\circ$

$$v = (I_m \omega L) (\text{sen } \omega t + 90^\circ)$$

En donde $V_m = I_m \omega L$ y $\cos \omega t = \text{sen } (\omega t + 90^\circ)$. Al graficar v e i en función del tiempo, se puede ver que el voltaje tiene un adelanto de 90° sobre la corriente (ó bien la corriente tiene un retraso de 90° en relación al voltaje), en una inductancia pura.

$$v = V_m \cos \omega t$$

ecuación 8.13

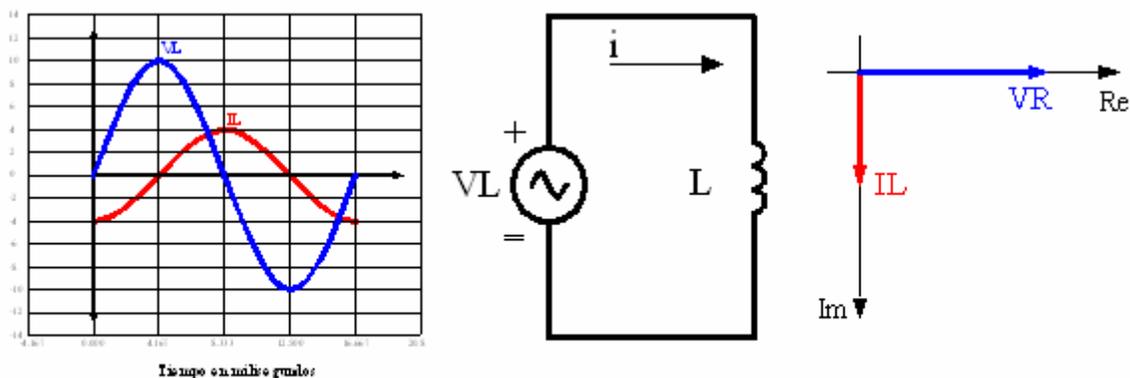


Figura 8.5 Corriente y voltaje en un elemento inductivo

8.3.4 Angulo de fase

Si tanto el voltaje como la corriente son funciones de tiempo y se representan gráficamente con la misma escala de tiempos, aparece un desplazamiento relativo entre ambas magnitudes que solo es nulo en el caso que se trate de un elemento resistivo puro. Dicho desplazamiento es el ángulo de fase y nunca puede ser superior a $\pm 90^\circ$ ó $\pm \pi/2$ radianes. Por convenio, al hablar del ángulo de fase se considera « *el que forma la intensidad de corriente i con el voltaje v* ».

8.3.5 Admitancia

Como se vio anteriormente, la conductancia es la inversa de la resistencia, para el caso de la impedancia, su inversa es la admitancia:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Su unidad es el siemen (S); en forma general se puede expresar por medio de:

$$Y = G \pm jB \quad \text{ecuación 8.14}$$

G = es la conductancia.

B = es la susceptancia.

Un error muy común es pensar que en este caso:

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{X}$$

El resultado correcto es:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R \pm jX} = \frac{(R)(jX)}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} \quad \text{ecuación 8.15}$$

8.4 Leyes de Kirchhoff para corriente alterna

Las Leyes de corrientes y voltajes de Kirchhoff se aplican del mismo modo a los circuitos de c.a. en estado permanente que a los de c.d. La única diferencia es que, en general, a un circuito de c.a., se asocian números complejos y fasores.

8.5 Divisores de voltaje y corriente

Los principios del divisor de voltaje y de corriente vistos en los circuitos de c.d., se aplican de igual forma en los circuitos de c.a. con la diferencia de que en estos, se asocian valores complejos y fasores. En general para una impedancia Z_n tenemos:

En un circuito en serie $V_n = V_{tot} \frac{Z_n}{Z_{eq}}$. ecuación 8.16

En un circuito paralelo $I_n = I_{tot} \frac{Z_{eq}}{Z_n}$. ecuación 8.17

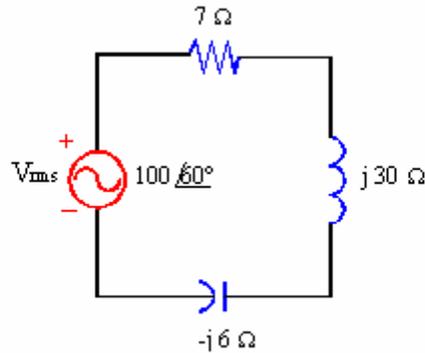


Figura 8.6 Circuito del Ejemplo 8.1 del divisor de voltaje en c.a.

Ejemplo 8.1:

Mediante el divisor de voltajes, determine el valor de voltaje en el inductor del circuito mostrado en la Figura 8.7.

$$V_{ind} = V_{tot} \frac{j30}{7 - j6 + j30}$$

$$V_{ind} = 100\angle 60^\circ \left(\frac{j30}{7 + j24} \right)$$

$$V_{ind} = 100\angle 60^\circ \left(\frac{30\angle 90^\circ}{25\angle 73.74^\circ} \right)$$

$$V_{ind} = 100\angle 60^\circ (1.2\angle 16.26^\circ)$$

$$V_{ind} = 120\angle 76.26^\circ \text{ volts}$$

8.6 Análisis de mallas y nodos para circuitos de c.a.

Los métodos de mallas y de nodos usados en la solución de circuitos de c.d., son también aplicables para resolver circuitos de c.a. en estado permanente, teniendo presente que ahora se manejan números complejos, y en el caso del análisis de nodos, se manejarán admitancias (Y) en circuitos de c.a., cuando en c.d. se manejaban valores de conductancias.

Ejemplo 8.2:

Hallar las corrientes de malla del circuito mostrado. Usando el análisis de mallas para la solución de este ejemplo, obtenemos las ecuaciones para cada malla y después aplicaremos la regla de Cramer para obtener los resultados.

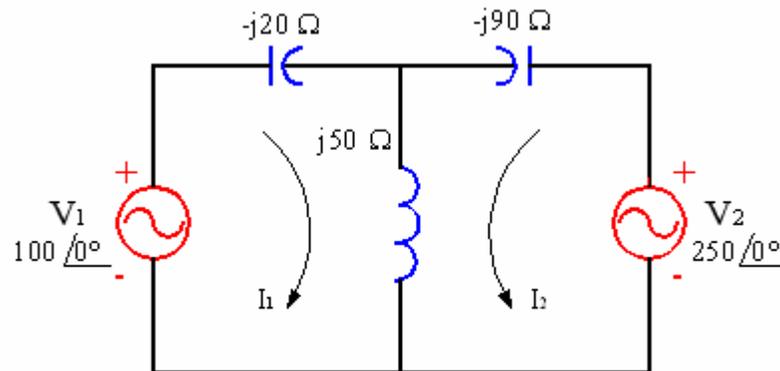


Figura 8.7 Circuito para el Ejemplo 8.2, análisis de mallas

Para la malla de I_1 :

$$100\angle 0^\circ = -j20I_1 + j50I_1 + j50I_2$$

$$j30I_1 + j50I_2 = 100\angle 0^\circ$$

Para la malla I_2 :

$$250\angle 0^\circ = -j90I_2 + j50I_2 + j50I_1$$

$$j50I_1 - j40I_2 = 250\angle 0^\circ$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$A = \begin{vmatrix} j30 & j50 \\ j50 & -j40 \end{vmatrix} = 1200 + 2500 = 3700$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 100 & j50 \\ 250 & -j40 \end{vmatrix} = -j4000 - j12500 = -j16500$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} j30 & 100 \\ j50 & 250 \end{vmatrix} = j7500 - j5000 = j2500$$

Ahora obteniendo las corrientes :

$$I_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{-j16500}{3700} = \frac{16500\angle 90^\circ}{3700\angle 0^\circ}$$

$$I_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{j2500}{3700} = \frac{2500\angle 90^\circ}{3700\angle 0^\circ}$$

$$I_1 = 4.46\angle -90^\circ \text{ Amperes.}$$

$$I_2 = 0.675\angle 90^\circ \text{ Amperes.}$$

Ejemplo 8.3:

Hallar las tensiones en los puntos *fg* y *gh* del circuito que se muestra.

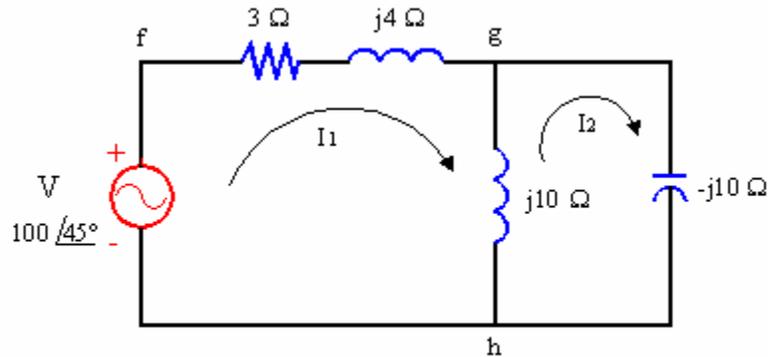


Figura 8.8 Circuito para el Ejemplo 8.3, análisis de mallas

Aplicando el análisis de mallas a este circuito tendremos:

Para la malla I_1 :

$$100\angle 45^\circ = (3 + j4 + j10)I_1 - j10I_2$$

$$(3 + j14)I_1 - j10I_2 = 100\angle 45^\circ$$

Para la malla I_2 :

$$0 = (j10 - j10)I_2 - j10I_1$$

$$-j10I_1 = 0 \quad \text{por lo tanto :}$$

$$I_1 = \frac{0}{-j10} = 0 \text{ Amper.}$$

sustituyendo este valor en la ecuación de malla I_1 :

$$(3 + j14)(0) - j10I_2 = 100\angle 45^\circ$$

$$-j10I_2 = 100\angle 45^\circ$$

$$I_2 = \frac{100\angle 45^\circ}{-j10} = \frac{100\angle 45^\circ}{10\angle -90^\circ}$$

$$I_2 = 10\angle 135^\circ \text{ Amperes.}$$

$$I_2 = -7.071 + j7.071 \text{ Amperes.}$$

Ahora calculamos los voltajes aplicando la Ley de Ohm en cada rama:

$$V_{fg} = Z_{fg}I_1 = (3 + j4)0 = 0 \text{ Volts}$$

$$V_{gh} = Z_{gh}(I_1 - I_2)$$

$$V_{gh} = (j10)[0 - (-7.071 + j7.071)]$$

$$V_{gh} = (j10)(7.071 - j7.071)$$

$$V_{gh} = 10 \angle 90^\circ (10 \angle -45^\circ)$$

$$V_{gh} = 100 \angle 45^\circ \text{ Volts.}$$

Que es el voltaje que se está aplicando al circuito.

Ejemplo 8.4:

Determinar, en el circuito mostrado, las tensiones en los nodos 1 y 2 con respecto a la referencia elegida.

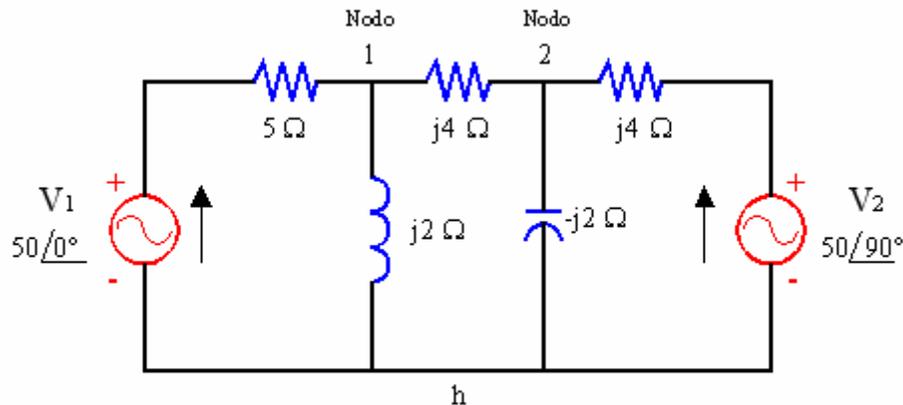


Figura 8.9 Circuito para el Ejemplo 8.4, análisis de nodos

Aplicando el análisis de nodos obtenemos las siguientes ecuaciones.

NODO 1

$$\frac{50 \angle 0^\circ}{5} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{j2} \right) V_1 - \frac{1}{4} V_2$$

$$(0.45 - j0.5)V_1 - 0.25V_2 = 10 \angle 0^\circ$$

NODO 2 :

$$\frac{50 \angle 90^\circ}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{4} \right) V_2 - \frac{1}{4} V_1$$

$$-0.25V_1 + (0.75 + j0.5)V_2 = 25 \angle 90^\circ$$

Aplicando la regla de Cramer resolvemos las dos ecuaciones anteriores:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & -0.25 \\ -0.25 & (0.75 + j0.5) \end{vmatrix} = 0.525 + j0.15 = 0.546 \angle -15.94^\circ$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -0.25 \\ j25 & (0.75 + j0.5) \end{vmatrix} = 7.5 + j11.25 = 13.52 \angle 56.3^\circ$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & 10 \\ -0.25 & j25 \end{vmatrix} = 15 + j11.25 = 18.75 \angle 36.86^\circ$$

los valores V_1 y V_2 se obtienen de :

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13.52 \angle 56.3^\circ}{0.546 \angle -15.94^\circ} = 24.76 \angle 72.24^\circ \text{ Volts.}$$

$$V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{18.75 \angle 36.86^\circ}{0.546 \angle -15.94^\circ} = 34.34 \angle 52.8^\circ \text{ Volts.}$$

8.7 Potencia en circuitos de corriente alterna

En muchos dispositivos eléctricos uno de los parámetros que más interesa es el de la potencia. El voltaje aplicado al circuito de elementos pasivos de la Figura 8.10 es una función del tiempo.

$$p = v \cdot i = i^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

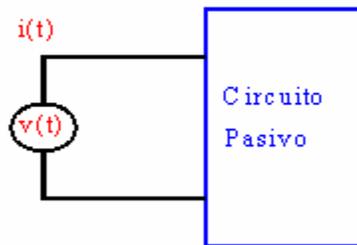


Figura 8.10 Aplicación de $v(t)$ e $i(t)$ a un circuito pasivo desconocido

La intensidad que resulta es, igualmente una función del tiempo cuyo valor depende de los elementos que integran dicho circuito. El producto, en cada instante, del voltaje por la corriente se llama potencia instantánea y viene dada por:

La potencia p puede tomar valores positivos ó negativos, según el instante o el intervalo de tiempo que se considere. Una potencia p positiva significa una transferencia de energía de la fuente a la red, mientras que una potencia p negativa corresponde a una transferencia de energía de la red a la fuente.

Potencia en régimen permanente senoidal

Potencia activa (P)

Considerando el caso ideal de que un circuito pasivo contenga exclusivamente, un elemento inductivo al que se aplica un voltaje senoidal de la forma:

$$v = V_m \text{ sen } \omega t$$

La intensidad de corriente que circula es de la forma:

$$i = I_m \text{ sen } (\omega t - \pi/2)$$

El valor de la potencia instantánea es:

$$p = vi = V_m I_m (\text{sen } \omega t) (\text{sen } \omega t - \pi/2)$$

como:

$$\text{sen } (\omega t - \pi/2) = -\text{cos } \omega t$$

y

$$2 \text{sen } x \text{ cos } x = \text{sen } 2x$$

podemos escribir:

$$p = -\frac{1}{2} V_m I_m \text{sen } 2\omega t \quad \text{ecuación 8.18}$$

En la Figura 8.11a se pone de manifiesto este hecho. Cuando v e i son positivos, la potencia p es positiva, por lo que existirá una transferencia de energía de la fuente a la bobina. Cuando v e i son de signo contrario, la potencia es negativa, y la bobina devuelve a la fuente la energía que antes le había suministrado. La frecuencia de la potencia es el doble que la correspondiente al voltaje o la corriente. El valor promedio de la potencia, que representaremos por p , en un ciclo o período completo es cero.

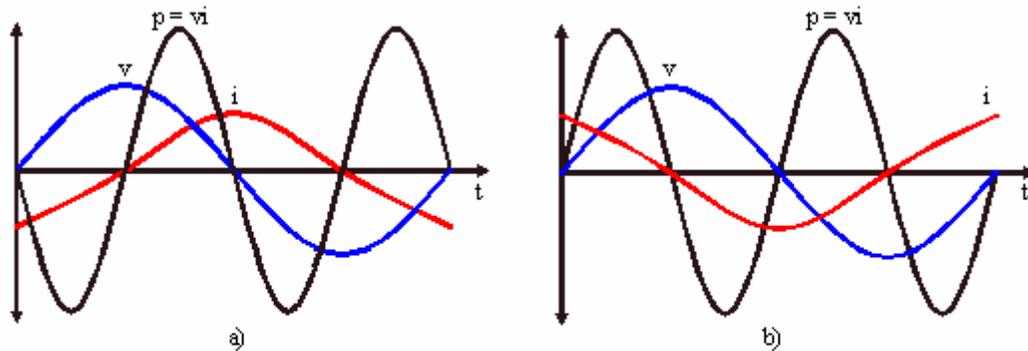


Figura 8.11 a) Potencia en un circuito inductivo puro,
b) Potencia en un circuito capacitivo puro

En el caso ideal que el circuito estuviese formado por un condensador puro, de capacidad C , obtendríamos resultados análogos, como puede apreciarse también en la Figura 8.11b.

Si aplicamos dicho voltaje a un circuito constituido por una sola resistencia, la corriente que circula por ella es:

$$i = I_m \text{sen } \omega t$$

y la potencia correspondiente será:

$$p = vi = V_m I_m \text{sen } \omega t$$

pero tenemos que:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2}(1 - \text{cos } 2x), \quad \text{con lo cual}$$

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m (1 - \text{cos } 2\omega t) \quad \text{ecuación 8.19}$$

Resultado que podemos observar en la Figura 8.12, donde vemos que la frecuencia de la potencia es también el doble de la correspondiente al voltaje o a la corriente. Además, la potencia es siempre positiva y varía desde cero hasta un valor máximo $V_m I_m$. El valor medio de la potencia es $\frac{1}{2}$ de $V_m I_m$.

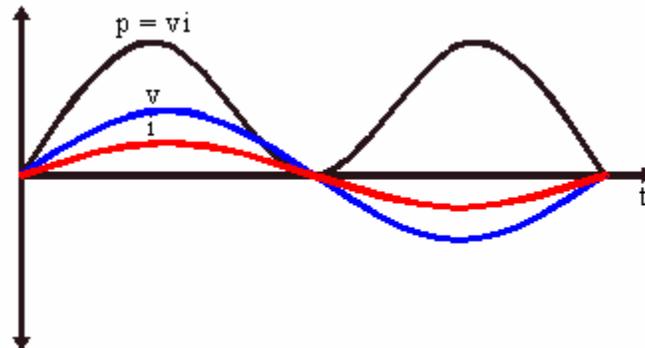


Figura 8.12 Curvas de v , i y p para un circuito resistivo puro

En el caso de un circuito pasivo general, aplicando un voltaje:

$$v = V_m \text{ sen } \omega t$$

circula una corriente:

$$i = I_m \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

donde el ángulo de fase será positivo o negativo, según el carácter inductivo o capacitivo, del circuito; la potencia instantánea es:

$$p = vi = V_m I_m \text{ sen } \omega t \text{ sen } (\omega t + \theta)$$

la que se convierte, por medio de reducciones trigonométricas en la siguiente ecuación:

$$p = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta - \cos (2\omega t + \theta)]$$

La potencia instantánea consta de un término cosenoidal:

$$-\frac{1}{2} V_m I_m \cos (2\omega t + \theta)$$

cuyo valor medio es cero, y de un término constante:

$$V_m I_m \cos \theta$$

ecuación 8.20

En estas condiciones, el valor medio de p o de potencia activa P es:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta = V I \cos \theta$$

ecuación 8.21

donde $V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ e $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ son los valores eficaces de los fasores \mathbf{V} e \mathbf{I} respectivamente. El término $\cos \theta$ se llama *factor de potencia* (f.p.). El ángulo θ es el que forman \mathbf{V} e \mathbf{I} y está siempre comprendido entre $\pm 90^\circ$. De esto se deduce que $\cos \theta$ y, por tanto, P , es siempre positivo. Pero para indicar el signo de θ diremos que un circuito inductivo, en el que la intensidad de corriente está

atrasada respecto al voltaje, tiene un factor de potencia en atraso. En un circuito capacitivo, como la corriente adelanta al voltaje, tiene un factor de potencia en adelanto. La unidad de potencia activa es el watt (W); como múltiplo se usa el kilowatt (Kw), 1 kW=1000 W.

Potencia aparente (S).

El producto VI se llama potencia aparente y se representa por la letra **S**. La unidad es el volt-amper (VA), y su múltiplo más empleado es el kilovolt-amper (kVA).

Potencia reactiva (Q).

El producto $VI \text{ sen } \theta$ se llama potencia reactiva y se representa por la letra **Q**. La unidad de **Q** es el volt-amper reactivo (VAR), su múltiplo más usual es el kilovolt-amper reactivo (kVAR).

8.7.1 Triángulo de potencias

Las expresiones de potencia activa, aparente y reactiva, se pueden representar geoméricamente mediante los lados de un triángulo que se llama *triángulo de potencias*. Consideremos un circuito inductivo representado con la corriente en atraso al voltaje como en la Figura 8.13, y también representando las componentes activa y reactiva de la misma corriente; vemos que la componente activa de la corriente queda en fase con el voltaje y la componente reactiva queda en cuadratura con el mismo (90° en atraso); y además en el tercer triángulo vemos las corrientes pero multiplicadas por el voltaje eficaz y en este caso:

Potencia Activa **P** = voltaje · componente activa de I:

$$P = V I \cos \theta \quad \text{ecuación 8.22}$$

Potencia Reactiva **Q** = voltaje · componente reactiva de I:

$$Q = V I \text{ sen } \theta \quad \text{ecuación 8.23}$$

Potencia Aparente **S** = voltaje · corriente:

$$S = V I \quad \text{ecuación 8.24}$$

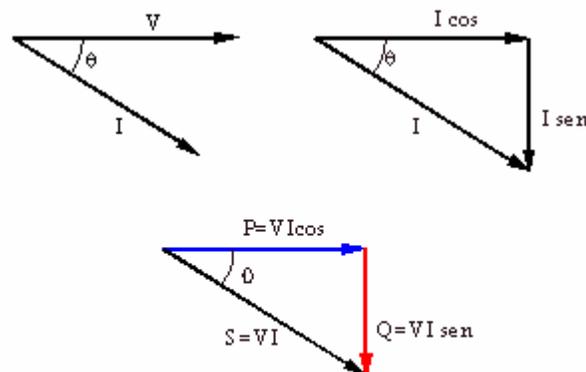


Figura 8.13 Triángulo de potencias para una carga inductiva

De la misma forma se construyen los diagramas del triángulo de potencias para una carga capacitiva, la cual tendrá una componente **Q** por encima de la horizontal.

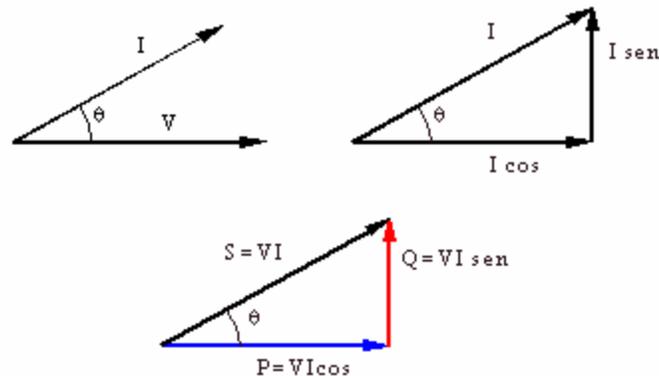


Figura 8.14 Triángulo de potencias para una carga capacitiva

8.7.2 Factor de potencia

En las explicaciones anteriores se ha mencionado un término que puede aún estar sin explicación satisfactoria; denominado factor de potencia. Como se ha visto, la potencia activa, es la que se emplea efectivamente por la carga para realizar un trabajo determinado, la potencia reactiva es la que se tiene por los efectos capacitivos ó inductivos de la propia carga, y la potencia aparente es la resultante de las dos anteriores, de acuerdo al ángulo que se forma entre la potencia activa (**P**) y la reactiva (**Q**) (Ver triángulo de potencias).

De acuerdo al triángulo de potencias podemos observar que el incremento o decremento del ángulo θ dependerá de la cantidad en que la potencia reactiva crezca o disminuya. Si la potencia reactiva es de un valor pequeño la potencia aparente tenderá a hacerse igual a la potencia activa.

Observando la formula para calcular la potencia activa, vemos que es igual a la potencia aparente (VI) por el coseno del ángulo ($\cos \theta$), si el ángulo se hace pequeño, el $\cos \theta$ se irá aproximando a la unidad; al valor que tiene el $\cos \theta$ en un instante determinado se le llama *factor de potencia*; entre más cercano esté a la unidad es mejor, pues nos indica que la potencia reactiva es pequeña, o en otras palabras, las pérdidas producidas por los efectos inductivos o capacitivos en la carga son pequeñas, y la potencia que se está aprovechando en trabajo (activa) es cercana a la potencia que se tendría si en la carga no existieran pérdidas. (Potencia Aparente = Potencia Activa como en un circuito resistivo puro).

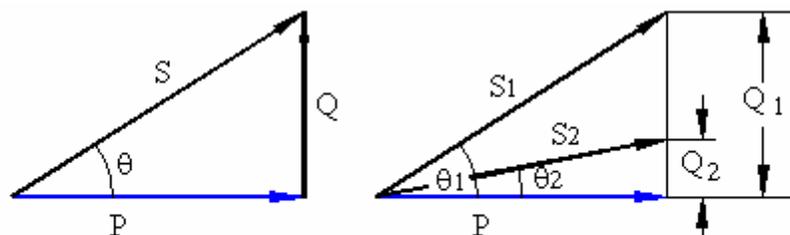


Figura 8.15 Relación entre las potencias real, aparente, reactiva y el factor de potencia

El factor de potencia no tiene unidades y sólo nos representa la razón que existe entre la potencia reactiva y la potencia aparente; es decir de la cantidad de pérdidas en potencia, por efectos inductivos o capacitivos que no se aprovechan en el sistema, y la potencia ideal que se debería de aprovechar.

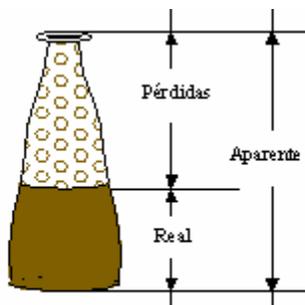


Figura 8.16 Analogía de los conceptos de los diferentes tipos de potencias

Las tres potencias tal vez se pueden comparar con un envase de refresco gasificado que se agita, en el cual se ocupa la mitad del envase por espuma y el resto por el refresco líquido; así la potencia aparente nos la representa el volumen total del envase, la potencia reactiva será la cantidad de refresco que se pierde en espuma y la potencia real ó activa será el refresco líquido que será posible beber. Ver la Figura 8.16.

CAPÍTULO 9

PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

9.0 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE LAS MAQUINAS ELÉCTRICAS

9.1 Principio de operación del transformador

Los transformadores son uno de los principales elementos que se encuentran invariablemente en un Sistema Eléctrico por grande o pequeño que este sea, son estos equipos los que han permitido el desarrollo de la industria eléctrica hasta las magnitudes en que actualmente se encuentra, pues debido a que es posible la transformación de los parámetros, voltaje y corriente, se tiene la posibilidad de transmitir a grandes distancias, grandes bloques de energía permitiendo esto disponer de las fuentes de energía (hidroeléctricas, geotermoeléctricas, nucleoeeléctricas, termoeléctricas, etc.) por retiradas que se encuentren de los centros de consumo.

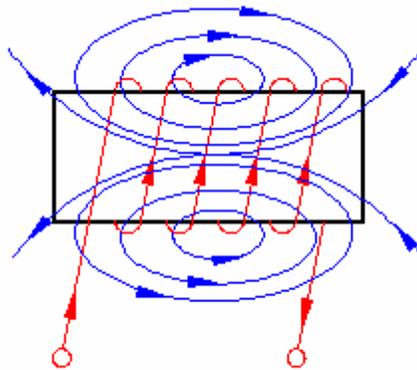


Figura 9.1 Flujo que se origina en un arrollamiento con núcleo de aire

Son también las maquinas más eficientes que se conocen, pues al no tener partes en movimiento no existen perdidas por fricción o razonamiento y por otra parte la calidad de los materiales ferromagnéticos que componen al núcleo ha ido en aumento, lo cual permite que las eficiencias de estos equipos sean del orden del 98 al 99%.

El principio del transformador se basa en la transferencia de la energía eléctrica por inducción de un arrollamiento a otro, lo cual se puede comprender si tomamos en cuenta las siguientes consideraciones:

a). Cuando por un conductor arrollado en espiras se hace circular una corriente se produce un flujo magnético como el que se representa en la Figura 9.1.

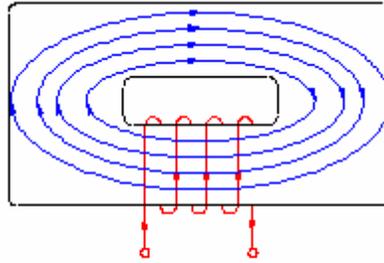


Figura 9.2 Flujo que se origina sobre un núcleo de material ferromagnético

b). Si el mismo arrollamiento se desarrolla sobre un núcleo de material ferromagnético, se produce un campo concentrado cuyo camino principal está determinado por el circuito del material magnético, como el que se muestra en la Figura 9.2; dicho campo es alterno y su frecuencia, depende de la frecuencia de la fuente.

c). De acuerdo con la Ley de Faraday ya mencionada, si arrollamos un segundo conductor en el núcleo de material ferromagnético mostrado en la Figura 9.2 se obtendrá una f.e.m. inducida en las terminales de dicho conductor, como se muestra en la Figura 9.3.

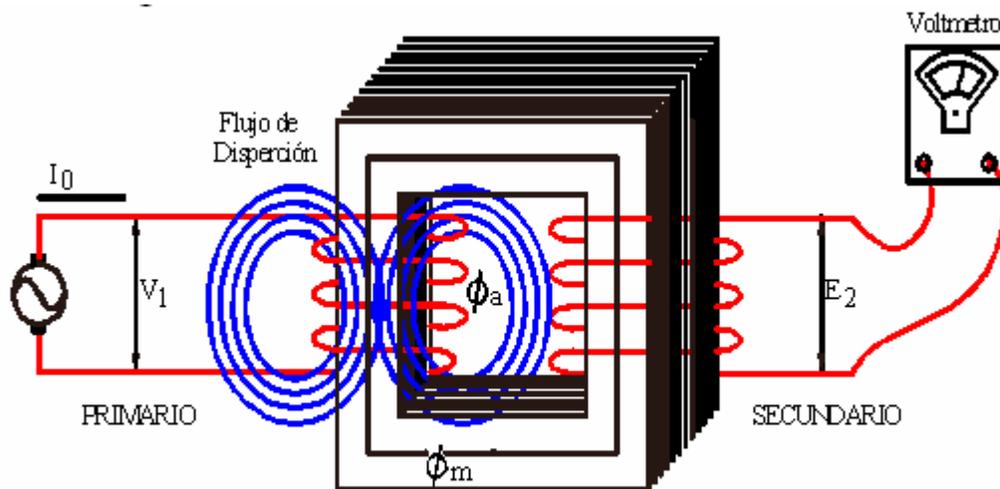


Figura 9.3 F.e.m. inducida en un segundo conductor arrollado en el núcleo de material ferromagnético

NOTA: Se le llama primario, al devanado al cual se conecta la fuente y secundario al devanado al cual se conecta la carga.

d). El diagrama vectorial que nos representa la condición anterior, es el que se muestra en la Figura 9.4 y nos indica que:

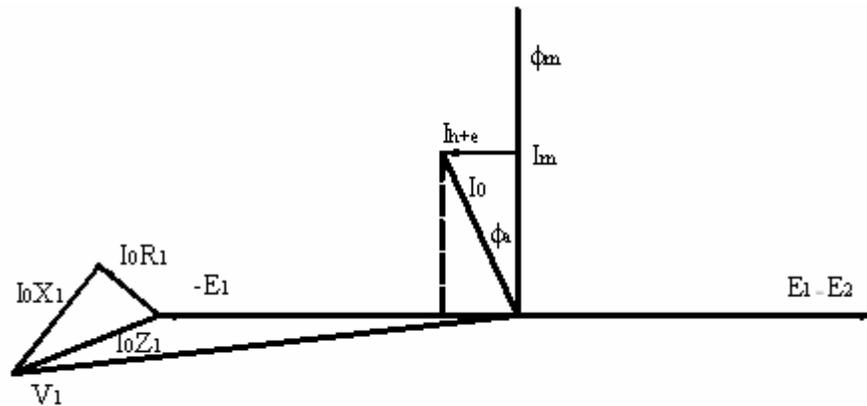


Figura 9.4 Diagrama vectorial de un transformador en vacío.

Cuando se aplica un voltaje V_1 al devanado del primario, estando abierto el secundario, circulara una corriente I_0 por el devanado primario, como se muestra en la Figura 9.3 y 9.4, la cual por ser un circuito altamente inductivo se encuentra atrasada casi 90° con respecto al voltaje V_1 .

El hecho de que el desplazamiento no sea de 90° ; se debe a la corriente I_{h+e} la cual origina las pérdidas en el núcleo del transformador, la componente I_m , es la que origina el flujo magnético ϕ_m , el cual corta tanto a las bobinas del primario como a las del secundario.

Por la acción de este flujo y de acuerdo con la Ley de Faraday se inducirán las fuerzas electromotrices E_1 y E_2 en los devanados correspondientes, el sentido de las cuales y de acuerdo a la Ley de Lenz, deberá de ser de 180° (Ver Figura 9.5). Debido a la resistencia del cobre del devanado, se tiene una caída del voltaje $I_0 R_1$, la cual se encuentra en fase con I_0 ; a 90° adelante con respecto a $I_0 X_1$, la cual es originada por el flujo de dispersión ϕ_a , que solo afecta a este devanado, como se muestra en las Figuras 1.81 y 1.82; de lo anterior se puede elaborar un circuito compuesto por una fuente V_1 y las cargas Z_1 y $Z_0 = \frac{E_1}{I_0}$ a la cual se le llama impedancia de excitación (Ver Figura 9.5).

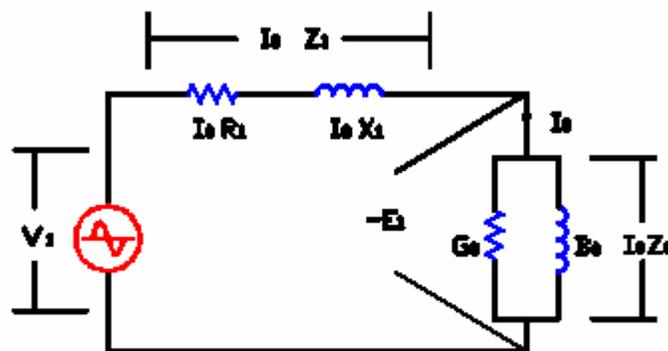


Figura 9.5 Circuito equivalente del primario de un transformador en vacío

e). Al cerrar el circuito del secundario por medio de una carga (Ver Figura 9.6) circulará una corriente I_2 cuyo sentido, de acuerdo con la Ley de Lenz, tendrá que ser tal que el flujo que genere esta corriente I_2 se debe oponer al flujo principal, que origino la corriente I_1 , a este efecto que origina el sentido de la corriente, se le conoce como POLARIDAD.

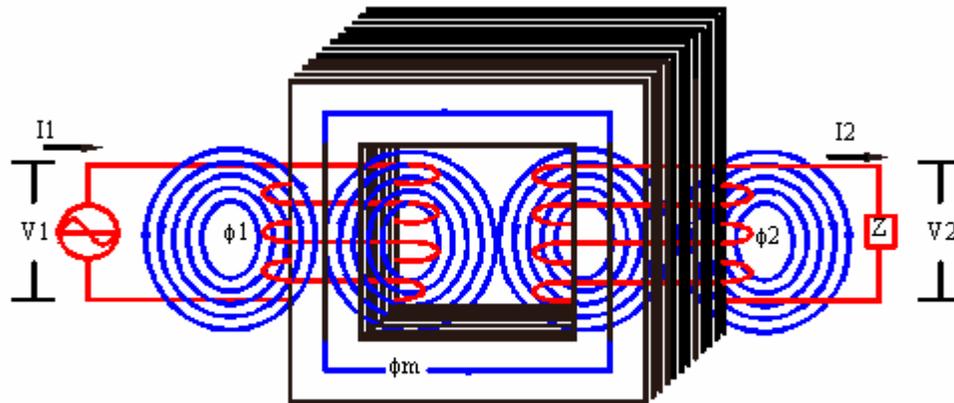
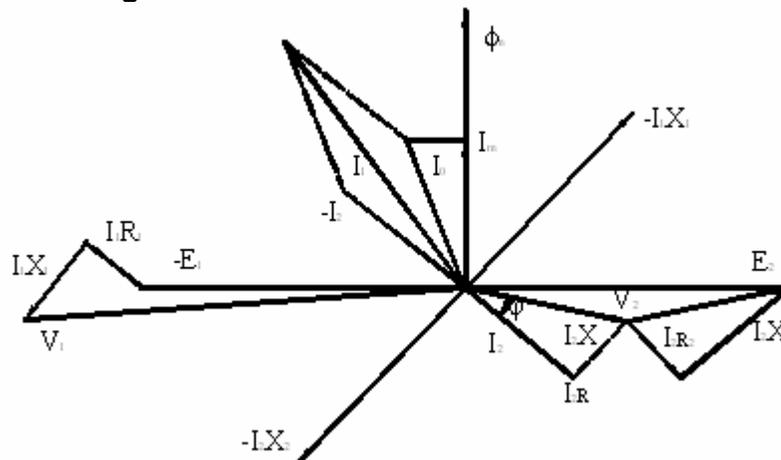


Figura 9.6 Circuito del secundario con una carga

El flujo producido por I_2 provoca una disminución en el flujo ϕ_m y por lo tanto una reducción en las f.e.m.'s E_1 y E_2 , por lo que al aumentar la diferencia entre V_1 y E_1 entra al transformador una corriente mayor a I_1 que se compone de la corriente original I_0 y una corriente I_1' la cual forma una f.m.m $I_1' N_1$ que es igual y opuesta a $I_2 N_2$ llevando el flujo ϕ_m a su valor original. Esto sucede durante todo el rango de trabajo del transformador. Si I_2 disminuye, crece el flujo ϕ_m y aumenta E_1 y E_2 al disminuir la diferencia entre V_1 y E_1 disminuye I_1 , de tal manera que ϕ_m se conserva en el mismo valor.

Esta regulación automática de los amper-vueltas primarios y secundarios, es el mecanismo de la transferencia de energía que permite conservar prácticamente constantes los voltajes inducidos y por tanto los voltajes terminales.

f). El diagrama vectorial que nos representa a un transformador cuando se conecta a una carga en el secundario, cuya característica predominante es inductiva, es el que se muestra en la Figura 9.7.



Como se mencionó anteriormente cuando se energiza el primario de un transformador y el secundario se encuentra en vacío, aparece una f.e.m. E_2 en las terminales del secundario; en el momento en que se aplica carga al secundario, el voltaje en las terminales del secundario irá variando de acuerdo con las características de la carga y la impedancia propia del transformador.

Las características de la carga (R, X), definirán el ángulo ϕ que existe entre el voltaje aplicado a la carga y la corriente que circula por esta (Al coseno del ángulo ϕ se le conoce como factor de potencia) la caída $I_2 R_2$ se encuentra en fase con la corriente I_2 , en donde R_2 es la resistencia ohmica del devanado secundario, la caída $I_2 X_2$ depende del flujo de dispersión ϕ_{a2} .

En forma similar el circuito mostrado en la Figura 9.5, se puede establecer para el secundario como el siguiente circuito (Ver Figura 9.8).

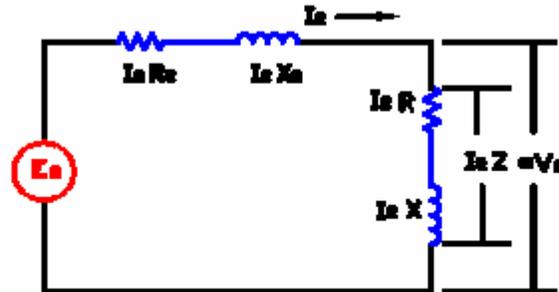


Figura 9.8 Circuito equivalente del secundario de un transformador con carga

g). Para fines de cálculo se puede establecer el diagrama equivalente (Figura 9.9) que considera a los dos devanados en un solo circuito eléctrico, no obstante que la conexión entre ellos es magnética y no eléctrica. Este diagrama es general y se debe considerar de acuerdo con el estudio que se este realizando, pues dependiendo de dicho estudio, se pueden despreciar algunos de estos parámetros.

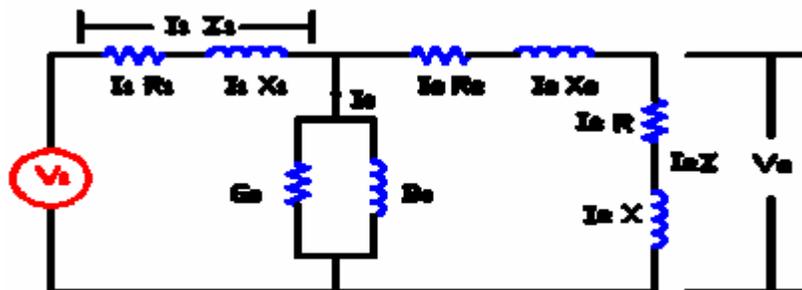


Figura 9.9 Circuito equivalente de un transformador con carga

Para poder elaborar este diagrama, se requiere referir los valores del secundario con respecto al primario o a la inversa, lo cual se puede obtener mediante las siguientes consideraciones:

$V_1 I_1 = V_2 I_2$ Capacidad del primario = Capacidad del secundario, despreciando las pérdidas del transformador

$N_1 I_1 = N_2 I_2$ Fuerza magnetomotriz del primario = Fuerza magnetomotriz del secundario

De donde:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = a$ Relación de Transformación

$$I_1 = \frac{I_2}{a} = I_2'$$

Corriente del secundario referido al primario

$$V_1 = aV_2 = V_2'$$

Voltaje del secundario referido al primario

$$I_2' R_2' = a (I_2 R_2) \text{ si } I_2' = I_2/a$$

Se deduce:

$$R_2' = a^2 R_2$$

Resistencia del secundario referida al primario

En la misma forma:

$$X_2' = a^2 X_2$$

Reactancia del secundario referida al primario

Y:

$$Z_2' = a^2 Z_2$$

Impedancia del secundario referida al primario

9.2 Principio de operación del alternador

Probablemente el resultado práctico más importante del gran descubrimiento de Faraday fue el desarrollo del alternador, que es el nombre que recibe el generador de corriente alterna, y es una máquina que transforma la energía mecánica en energía eléctrica. Anteriormente se trató la Ley de Faraday referente a la inducción electromagnética de una fuerza electromotriz en un conductor dentro de un campo magnético, ahora debemos establecer que sentido adopta la corriente que circula por dicho conductor de acuerdo al movimiento que tiene el mismo dentro del campo, Figura 9.10, y esto se obtiene aplicando la *Regla de la mano derecha para generadores*. Aquí se presupone que el campo es fijo y el conductor se mueve dentro de él. Si utilizamos el dedo pulgar para indicar el movimiento del conductor y el dedo índice para representar el sentido del campo magnético (N-S), el dedo medio nos representa la fuerza electromotriz inducida y el sentido de la corriente que circulará por el conductor, ver Figura 9.11.

Aunque los generadores reales contienen muchas bobinas, cada una con muchos conductores individuales y espiras conectadas en serie, es conveniente hacer las consideraciones de funcionamiento para una sola bobina con una sola espira, que gira en el sentido de las manecillas del reloj dentro de un campo bipolar.

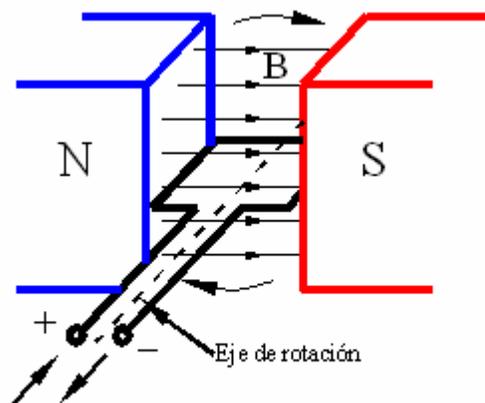


Figura 9.10 Principio de funcionamiento del alternador

Debe notarse que la polaridad del generador elemental anterior indica que el conductor de la izquierda es positivo y el de la derecha es negativo, y esto no debe dar lugar a la confusión, si se ha convenido que la corriente circula de la terminal positiva a la negativa, puesto que el generador se está tratando como una fuente de tensión, o batería, en la cual al conectar una carga en uno de sus bornes, hace circular la corriente del borne positivo al negativo a través de la carga, lo que si es correcto.

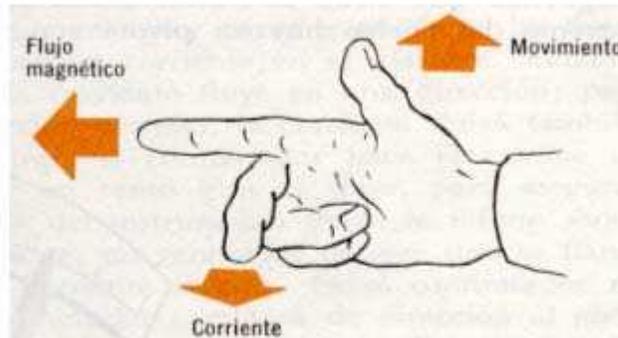


Figura 9.11 Regla de la mano derecha para generadores

Si la bobina de una sola espira en la Figura 9.12, gira en un campo magnético uniforme a velocidad constante, la fuerza electromotriz inducida en un lado determinado de la bobina variará al ocupar la bobina las posiciones 0 a 7.

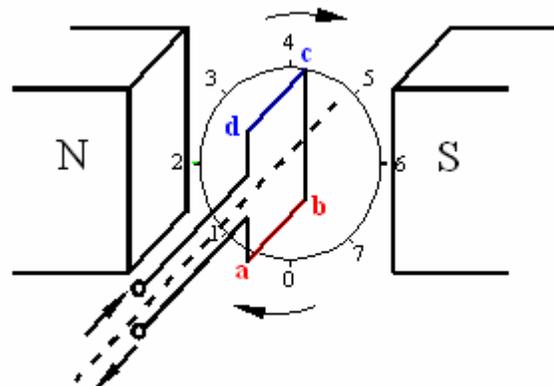


Figura 9.12 Período o tiempo del alternador

Usaremos el lado “a-b” como referencia, se observa que cuando la bobina esta en la posición cero, la fuerza electromotriz inducida en las bobinas es cero, debido a que el conductor se mueve paralelamente a las líneas de campo, es decir, no corta líneas de flujo y no se induce fuerza electromotriz. Cuando gira la bobina y se posiciona en 1, el conductor corta líneas del campo con un ángulo de 45°, la fuerza electromotriz inducida en este conductor será de aproximadamente 70.7% de la tensión inducida máxima (de acuerdo con las siguientes expresiones matemáticas de la fuerza electromotriz inducida:

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int B dA = -\frac{d}{dt} [B A \cos \theta] \quad \text{ecuación 9.1}$$

donde A es el área de la bobina y θ es el ángulo entre \mathbf{B} y \mathbf{A} . Como $w = d\theta/dt$, entonces $\theta = \theta_0 + wt$. En forma arbitraria se hace que $\theta_0 = 0$, entonces

$$\mathcal{E} = -B A \frac{d}{dt}(\cos wt) = B A w \text{sen } wt \quad \text{ecuación 9.2}$$

Si la bobina que gira tiene N vueltas:

$$\mathcal{E} = -N B A w \text{sen } wt \quad \text{ecuación 9.3}$$

Cuando la bobina alcanza los 90° en la posición 2, el conductor "a-b", presenta el máximo corte de líneas de flujo y representa el máximo valor en fuerza electromotriz inducida. Al ocupar la posición 3, que corresponde a 135° , se obtiene un valor de fuerza electromotriz idéntico al obtenido en la posición 1, donde el corte de líneas de flujo se realiza en menor intensidad; y la polaridad aún es positiva pues el conductor "a-b" todavía se mueve hacia arriba.

En la posición 4, es decir a 180° , la fuerza electromotriz inducida es nuevamente cero, ya que el conductor se mueve paralelamente al campo. En la posición 5, que son 225° , la fuerza electromotriz inducida en el conductor se invierte de sentido, por que el conductor "a-b" se mueve ahora hacia abajo dentro del campo, es decir, su polaridad ahora es negativa.

La fuerza electromotriz aumenta hasta el máximo negativo en la posición 6 (270°) y por último disminuye al pasar por el punto 7 hasta llegar a cero en la posición inicial 0.

Debe aclararse que la naturaleza de la fuerza electromotriz inducida es a la vez senoidal y alterna y esto se produce en todos los generadores sean estos de c.d. ó c.a. La diferencia para la obtención de la cd. es el uso de un dispositivo mecánico de conmutación, que en tal caso se usa un colector de anillos rozantes.

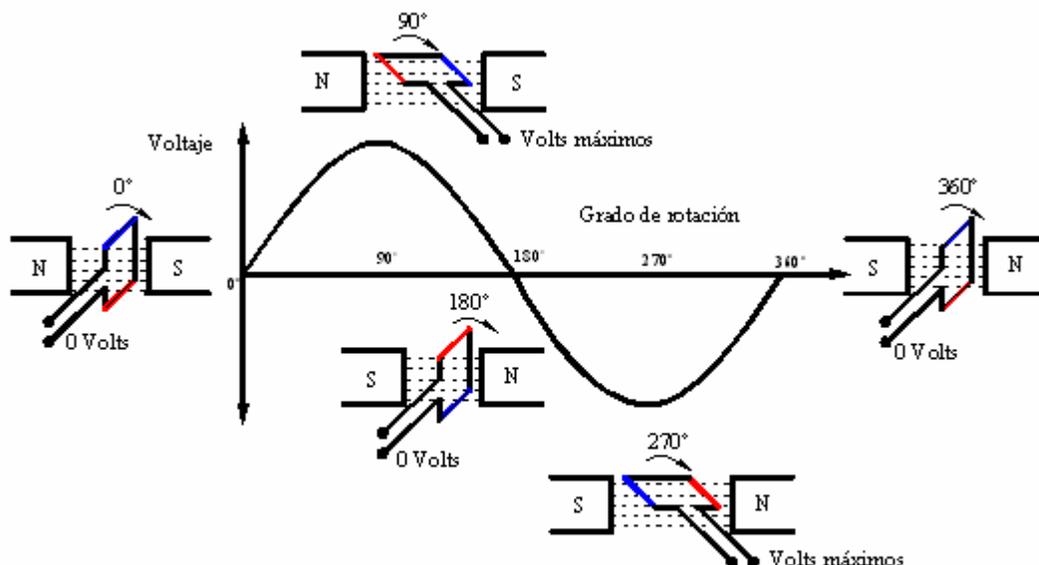


Figura 9.13 Principio de generación de corriente alterna

A continuación debe señalarse que las partes elementales de una máquina rotatoria, sea un generador o un motor, en términos amplios son las mismas en todas las máquinas eléctricas rotatorias; cuentan con un elemento *rotor* que (gira), y un elemento *estator* (que está fijo), lo que nos proporciona el movimiento relativo entre campo y conductores. En el caso del generador de c.a., el inducido está fijo, es el *estator de la máquina*; y el inductor se mueve (*campo*), es el rotor. Esto principalmente se debe a consideraciones técnicas que permiten hacer más robusto el inducido para el caso de la generación de una considerable cantidad de energía.

Para analizar las relaciones de tensión que se presentan en un generador de c.a., es conveniente tomar en cuenta lo siguiente:

El par electromagnético (desarrollado en el conductor del inducido por el que circula corriente) se opone a la rotación (del campo magnético del rotor respecto al inducido), acorde a la Ley de Lenz.

La tensión generada en el inducido produce una corriente en el mismo. La fase (desplazamiento angular) de la corriente del inducido respecto a la fuerza electromotriz inducida depende de la naturaleza de la carga conectada en los bornes del alternador.

La tensión generada por fase, E_{gp} , de un alternador polifásico puede obtenerse por la suma vectorial:

$$E_{gp} = V_p + I_p Z_p \quad \text{ecuación 9.4}$$

V_p es la tensión por fase en bornes del generador

$I_p Z_p$ es la caída de tensión por la impedancia interna del generador

La relación entre la tensión en bornes por fase del generador y la fuerza electromotriz generada puede expresarse como sigue:

$$V_p = E_{gp} - I_a R_a - I_a(jX_a) + -E_{ar} \quad \text{ecuación 9.5}$$

$I_a R_a$ es la caída de tensión en el devanado del inducido que tiene una resistencia Efectiva (c.a.) de R_a por fase.

$I_a(jX_a)$ es la caída de tensión en bornes debida a la reactancia del devanado del Inducido por la reactancia de dispersión ocasionada en el mismo al circular una corriente.

E_{ar} es el efecto de la reacción del inducido por fase (magnetizante, transversal o desmagnetizante).

Si el alternador está en vacío, es decir, no tiene ninguna carga conectada a sus bornes, la tensión en bornes y la fuerza electromotriz inducida son iguales, las tres causas de caída de tensión son función de la intensidad de la carga, I_a , o la corriente que absorbe la carga conectada al generador y esto es lo que afecta las características de tensión del alternador.

Cargas con factor de potencia unitario

El diagrama vectorial que nos demuestra las distintas caídas de tensión, causantes de las diferencias entre las tensiones generadas y en bornes, se ve en la Figura 9.14.

Con factor de potencia igual a uno, la corriente en el inducido I_a está en fase con la tensión en bornes V_p de fase. La caída de tensión por la resistencia del inducido ($I_a R_a$) está en fase con la corriente I_a .

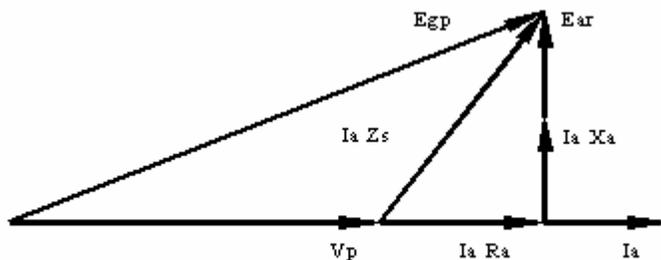


Figura 9.14 Diagrama vectorial para un generador con carga de factor de potencia unitario

La caída por la reactancia del inducido ($I_a X_a$), está adelantada 90° respecto a la corriente a través de dicha reactancia I_a (por que la corriente se atrasa a la tensión 90° en un circuito con reactancia inductiva). La caída de tensión por reacción del inducido avanza con respecto a I_a que la produce y está en fase con la caída por reactancia del inducido ($I_a X_a$).

La ecuación del alternador para cargas con factor de potencia igual a uno en forma compleja es:

$$E_{gp} = (V_p + I_a R_a) + j(I_a X_a + E_{ar}) \quad \text{ecuación 9.6}$$

Como se ve en el diagrama vectorial, para $FP = 1$, la tensión en bornes por fase (V_p), es siempre menor que la tensión generada por fase (E_{gp}).

Cargas con factor de potencia inductivo

Si la intensidad en el inducido I_a está retrasada respecto a la tensión de fases en bornes (V_p), un cierto ángulo θ , debido a una carga externa inductiva, las tensiones pueden representarse según se muestra en la Figura 9.15.

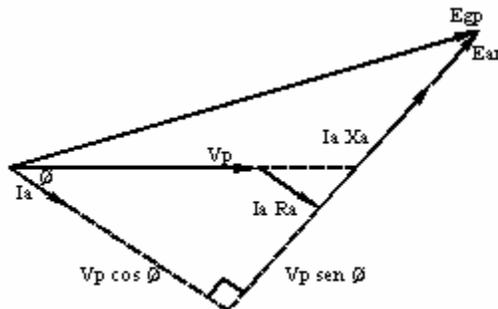


Figura 9.15 Diagrama vectorial para un generador con carga de factor de potencia inductivo

La caída ($I_a R_a$), continúa en fase con la corriente en el inducido y las caídas de tensión por la reactancia y la reacción de inducido avanza 90° con respecto a la intensidad; es más simple indicar el valor de (E_{gp}), en función de sus componentes vertical y horizontal.

$$E_{gp} = (V_p \cos \theta + I_a R_a) + j(V_p \sin \theta + I_a X_s) \quad \text{ecuación 9.7}$$

Resulta evidente que para obtener la misma tensión nominal (V_p), se necesita una tensión inducida superior (E_{gp}), para factores de potencia inductivos que para factores de potencia unidad.

Ejemplo 9.1:

Un alternador trifásico conectado en estrella, de 1000 kVA y 4600 v, tiene una resistencia en el inducido de $2 \frac{\text{ohm}}{\text{fase}}$ y una reactancia síncrona en el inducido (X_s) = $20 \frac{\text{ohm}}{\text{fase}}$.

Encontrar la tensión generada a plena carga por fase a:

- a). Factor de potencia unitario
- b). Factor de potencia inductivo de 0.75

Solución:

$$V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{4600 \text{ v}}{1.73} = 2660 \text{ v}$$

$$I_p = \text{kVA} \times \frac{1000}{3V_p} = 1000 \times \frac{1000}{3 \times 2660} = 125 \text{ A}$$

Caída:

$$\frac{I_a R_a}{\text{fase}} = 125 \text{ A} \times 2 \text{ ohm} = 250 \text{ v}$$

$$\frac{I_a X_s}{\text{fase}} = 125 \text{ A} \times 20 \text{ ohm} = 2500 \text{ v}$$

a). Para un factor de potencia unitario

$$\begin{aligned} E_{gp} &= (V_p + I_a R_a) + j I_a X_s \\ &= (2660 + 250) + j2500 \\ &= 2910 + j2500 \\ &= 3836/40.66^\circ \frac{\text{v}}{\text{fase}} \end{aligned}$$

b). Para un factor de potencia inductivo de 0.75

$$\begin{aligned} E_{gp} &= (V_p \cos \theta + I_a R_a) + j(V_p \sin \theta + I_a X_s) \\ &= (2660 \times 0.75 + 250) + j(2660 \sin 41.4^\circ + 2500) \\ &= 2245.29 + j4259.08 \\ &= 4814.67/62.2^\circ \frac{\text{v}}{\text{fase}} \end{aligned}$$

Cargas con factor de potencia capacitivo

Si la intensidad de fase en el inducido (I_a), está adelantada respecto a la tensión de fase en bornes (V_p), un cierto ángulo (θ), como resultado de una carga externa capacitiva. La caída ($I_a R_a$), siempre está en fase con la intensidad en el inducido, la caída por reactancia síncrona ($I_s X_s$), adelanta 90° respecto a la intensidad en el inducido. Ver Figura 9.16.

$$E_{gp} = (V_p \cos \theta + I_a R_a) + j(V_p \sin \theta - I_a X_s) \quad \text{ecuación 9.8}$$

Resulta evidente que para la misma tensión nominal en bornes por fase, se necesita menos tensión generada que para un factor de potencia inductivo.

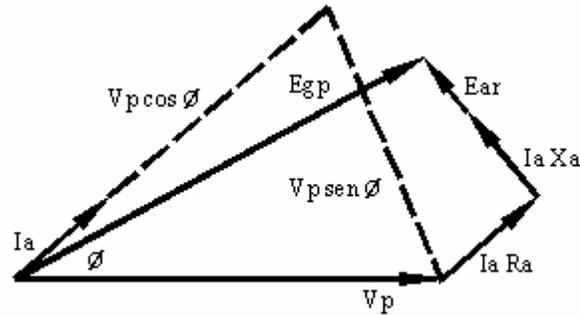


Figura 9.16 Diagrama vectorial para un generador con carga de factor de potencia capacitivo

Ejemplo 9.2:

Repetir el Ejemplo 9.1 anterior para determinar la tensión generada por fase a plena carga con:

- Una carga capacitiva con un factor de potencia de 0.75
- Una carga capacitiva con un factor de potencia de 0.40

Solución:

Del Ejemplo 9.1 anterior:

Caída:

$$\frac{I_a R_a}{\text{fase}} = 125 \text{ A} \times 2 \text{ ohm} = 250 \text{ v}$$

$$\frac{I_a X_s}{\text{fase}} = 125 \text{ A} \times 20 \text{ ohm} = 2500 \text{ v}$$

- Para un factor de potencia capacitivo de 0.75

$$\begin{aligned} E_{gp} &= (V_P \cos \theta + I_a R_a) + j(V_P \sin \theta - I_a X_s) \\ &= [2660 (0.75) + 250] + j[2660 (0.676) - 2500] \\ &= 2250 - j730 \\ &= 2352 / -17.36^\circ \frac{\text{v}}{\text{fase}} \end{aligned}$$

- Para un factor de potencia capacitivo de 0.40

$$\begin{aligned} E_{gp} &= (V_P \cos \theta + I_a R_a) + j(V_P \sin \theta - I_a X_s) \\ &= [2660 (0.4) + 250] + j[2660 (0.916) - 2500] \\ &= 1314 - j 63.44 \\ &= 1315 / -2.76^\circ \frac{\text{v}}{\text{fase}} \end{aligned}$$